

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



ÚSTAV SOUDNÍHO INŽENÝRSTVÍ

INSTITUTE OF FORENSIC ENGINEERING

FUZZY MARKOVY ŘETĚZCE A JEJICH VYUŽITÍ V ŘÍZENÍ RIZIK

FUZZY MARKOV CHAINS AND THEIR USE IN RISK MANAGEMENT

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. PETRA ŠINDELKOVÁ

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. PETR MISÁK, Ph.D.

BRNO 2015

Vysoké učení technické v Brně, Ústav soudního inženýrství

Ústav soudního inženýrství

Akademický rok: 2014/2015

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

student(ka): Bc. Petra Šindelková

který/která studuje v **magisterském navazujícím studijním programu**

obor: **Řízení rizik stavebních konstrukcí (3901T044)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Fuzzy Markovovy řetězce a jejich využití v řízení rizik

v anglickém jazyce:

Fuzzy Markov chains and their use in risk management

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Diplomová práce se bude zabývat aplikací Markovových řetězců a jejich rozšíření prostřednictvím teorie fuzzy množin v řízení rizik. Teoretické postupy budou aplikovány v reálném výrobním procesu.

Cíle diplomové práce:

Diplomantka popíše základní poznatky z klasických Markovových řetězců a dále shrne základy teorie fuzzy množin, které jsou použitelné pro rozšíření těchto metod. Dále bude provedena aplikace získaných poznatků v reálném výrobním procesu.

Seznam odborné literatury:

Tichý, Milík. Ovládání rizika. Analýza a management. 1. vydání. Praha: Nakladatelství C. H Beck, 2006. ISBN 80-7179-415-5.

ČSN EN 31010: Management rizik - Techniky posuzování rizik

Vedoucí diplomové práce: Ing. Petr Misák, Ph.D.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2014/2015.

V Brně, dne 24.10.2014

L.S.

doc. Ing. Aleš Vémola, Ph.D.
Ředitel vysokoškolského ústavu

Abstrakt

Diplomová práce se zabývá aplikací Markovových řetězců na výrobu betonového zboží. Teoretická část je zaměřena na objasnění pojmů z managementu rizik a jsou zde popsány postupy řešení klasických Markovových řetězců. Dále jsou zde uvedeny základy fuzzy logiky a nakonec vysvětleny postupy využití fuzzy logiky ve výpočtu klasických Markovových řetězců v podkapitole nazvané Fuzzy Markovovy řetězce. V praktické části je potom popsán postup výroby betonového zboží, konkrétně betonové zámkové dlažby. Na tento proces výroby jsou aplikovány poznatky z teoretické části a je zde provedeno srovnání a vyhodnocení dvou metod výpočtu Markovových řetězců (klasický a fuzzy přístup).

Abstract

This thesis deals with the application of Markov chains for the production of concrete products. The theoretical part is focused on clarifying the concepts of risk management and describes the procedures for dealing with classical Markov chains. There are presented basics of fuzzy logic and finally there is explained the procedure using fuzzy logic in calculating of classical Markov chains in the subsection entitled Fuzzy Markov chains. The practical part describes production process, namely concrete pavements. On this production process is applied knowledge from the theoretical part and there is a comparison and evaluation of two methods of Markov chains calculation (classic and fuzzy approach).

Klíčová slova

Management rizik, analýza stromu chyb, fuzzy množiny, fuzzy logika, fuzzy čísla, betonové zboží, stavební výroba, Markovovy řetězce, fuzzy Markovovy řetězce

Keywords

Risk management, fault tree analysis, fuzzy sets, fuzzy logic, fuzzy numbers, concrete products, construction output, Markov chains, fuzzy Markov chains

Bibliografická citace

ŠINDELKOVÁ,P. *Fuzzy Markovovy řetězce a jejich využití v řízení rizik*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Ústav soudního inženýrství, 2015. 67 s. Vedoucí diplomové práce Ing. Petr Misák, Ph.D.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně pod vedením pana Ing. Petra Misáka, Ph.D. a že jsem uvedla všechny použité zdroje.

V Brně dne 24. května 2015

.....

Petra Šindelková

Poděkování

Ráda bych poděkovala vedoucímu mé diplomové práce Ing. Petru Misákovi, Ph.D. za cenné rady, vedení při práci a ochotu při konzultacích.

Obsah

1 Úvod	3
2 Teoretická část	4
2.1 Management rizik	4
2.1.1 Vybrané pojmy	4
2.1.2 Posuzování rizik	5
2.1.3 Volba technik posuzování rizik	8
2.1.4 Analýza stromu chyb - FTA	9
2.2 Markovovy řetězce	11
2.2.1 Použití a aplikace Markovových řetězců	11
2.2.2 Základní pojmy	13
2.2.3 Některé vlastnosti Markovových řetězců	15
2.3 Základy fuzzy logiky	17
2.3.1 Klasické množiny	17
2.3.2 Relace	18
2.3.3 Fuzzy množiny	19
2.3.4 Fuzzy logika a fuzzy systémy	24
2.4 Fuzzy Markovovy řetězce	28
2.4.1 Vybrané definice	28
2.4.2 Shrnutí	31
3 Aplikace fuzzy Markovových řetězců ve výrobě stavebních hmot a dílců	32
3.1 Proces výroby betonového zboží	33
3.1.1 Lidské zdroje	33
3.1.2 Mechanismy	34
3.1.3 Materiály	34
3.1.4 Popis procesu	35
3.2 Analýza stromu chyb	39
3.3 Aplikace klasických Markovových řetězců	42
3.3.1 Matice pravděpodobností přechodu	45

3.3.2	Výpočet absolutních pravděpodobností přechodu po 5 krocích . . .	46
3.3.3	Střední hodnoty počtu jednotlivých operací na jeden výrobek . . .	47
3.3.4	Střední hodnoty počtu provedených operací na jeden výrobek v celém výrobním procesu	48
3.3.5	Pravděpodobnosti přechodů z neabsorbujících do absorbujících stavů	49
3.4	Aplikace fuzzy Markovových řetězců	51
3.4.1	Výpočet absolutních pravděpodobností přechodu po 5 krocích . . .	53
3.4.2	Střední hodnoty počtu jednotlivých operací na jeden výrobek . . .	56
3.4.3	Střední hodnoty počtu provedených operací na jeden výrobek v celém výrobním procesu	57
3.4.4	Pravděpodobnosti přechodů z neabsorbujících do absorbujících stavů	58
3.5	Srovnání výsledků klasických a fuzzy Markovových řetězců	59
3.5.1	Porovnání pravděpodobností po 5 provedených operacích	60
3.5.2	Porovnání počtu jednotlivých operací na jeden výrobek	60
3.5.3	Porovnání počtu operací na jeden výrobek v celém výrobním procesu	60
3.5.4	Porovnání pravděpodobností přechodů z neabsorbujících do absorbujících stavů	61
4	Závěr	62

1. Úvod

Stále častěji se v dnešní době hovoří o rozpoznávání, řízení a eliminaci rizik. Ať už se jedná o rizika více či méně závažná, vždy mají nějaký vliv na fungování dané organizace. Většina současných firem již začíná vypracovávat plány na eliminaci rizik (při výrobním procesu, při plánování firemní strategie atd. . .), aby zamezily zbytečným finančním ztrátám. V této souvislosti přichází na řadu různé teorie, které mají za úkol analyzovat procesy, které probíhají v organizaci, a rozpoznat, zda při těchto procesech mohou nastat nějaké komplikace, které by mohly nepříznivě ovlivnit chod firmy. Metod, jak těmto konfliktním situacím předcházet, je nepřeberné množství a každá má své využití v konkrétním odvětví. Vždy je potřeba důkladně promyslet, kterou metodu bude možné použít na konkrétní řešenou situaci.

Diplomová práce se zabývá aplikací Markovových řetězců pro výrobní systém ve výrobě stavebních hmot a dílců. Nejdříve jsou zde popsány obecné poznatky z managementu rizik (kterým se zabývají normy ČSN ISO 31000 [1] a ČSN EN 31010 [2]), jako je vysvětlení některých pojmů, objasnění procesu managementu rizik apod. Dále je část práce věnována obecnému výkladu základních poznatků z klasických Markovových řetězců, jsou zde shrnuty základy teorie fuzzy logiky, fuzzy Markovovy řetězce a zhodnoceno jejich využití v procesu výroby stavebních materiálů a výrobků. Na to je navázáno příklady použití těchto teoretických disciplín v praxi. V praktické části je aplikováno využití fuzzy Markovových řetězců v reálném výrobním procesu na příkladu výroby betonového zboží, konkrétně zámkové dlažby [3].

Ve strojírenském průmyslu má již tato teorie své opodstatněné místo. Pomocí Markovových řetězců se provádí analýza jakosti výrobního procesu za účelem např. podchycení nejméně úspěšných operací, plánování počtu polotovarů, pro návrh nového výrobního procesu aj. Cílem této diplomové práce je nalézt a popsat obdobné využití pro fuzzy Markovovy řetězce v oblasti plánování a výroby v odvětví stavebních materiálů a výrobků [3].

2. Teoretická část

2.1 Management rizik

Veškeré lidské činnosti s sebou nesou i určitá rizika. Organizace se pak snaží tato rizika identifikovat, analyzovat a poté vyhodnocovat. Vždy se však může přihodit nějaká neočekávaná věc, která buď negativně, či pozitivně ovlivní vývoj následujících událostí. Co vlastně znamenají pojmy jako *riziko*, *událost*, nebo *následek* a jakým způsobem probíhá posuzování rizik, bude uvedeno v následující kapitole, která vychází ze zdrojů [1, 2].

2.1.1 Vybrané pojmy

Následující pojmy jsou převzaty z normy ČSN EN 31000: Management rizik – Principy a směrnice [1]:

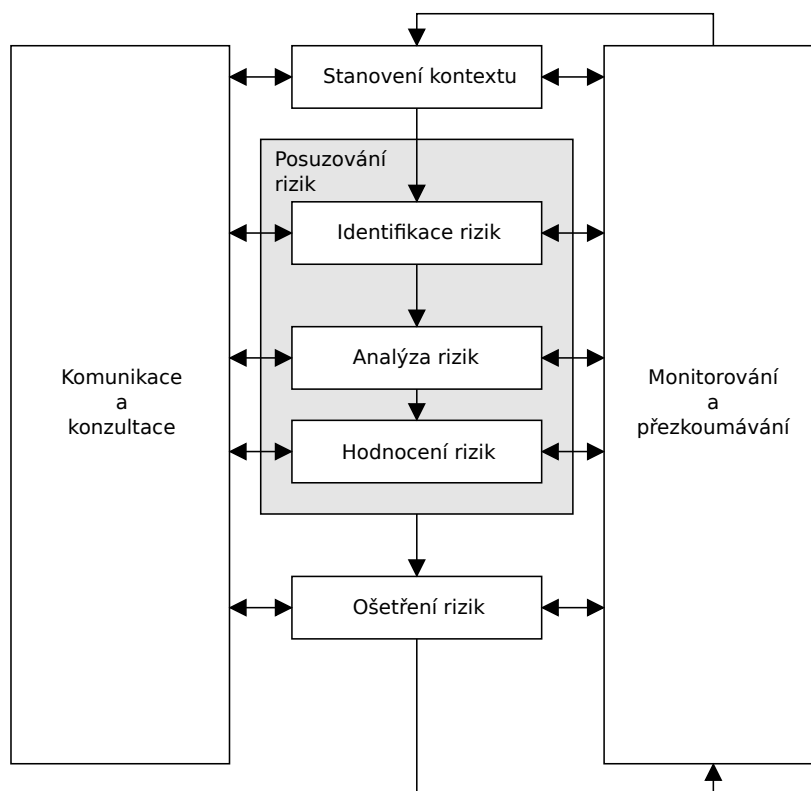
- **Riziko** – účinek nejistoty na dosažení cílů.
- **Management rizik** – koordinované činnosti pro vedení a řízení organizace s ohledem na rizika.
- **Plán managementu rizik** – schéma v rámci managementu rizik specifikující přístup, dílčí části managementu a zdroje, které se mají použít k managementu rizik.
- **Vlastník rizika** – osoba nebo entita s odpovědností a pravomocí řídit riziko.
- **Posuzování rizik** – celkový proces *identifikace rizik*, *analýzy rizik* a *hodnocení rizik*.
- **Identifikace rizik** – proces hledání, rozpoznávání a popisování rizik.
- **Zdroj rizika** – prvek, který sám nebo v kombinaci s jinými prvky má vnitřní potenciální schopnost způsobit riziko.
- **Událost** – výskyt nebo změna určité množiny okolností.
- **Následek** – výsledek *události* působící na cíle.

- **Analýza rizika** – proces pochopení povahy rizika a stanovení *úrovně rizika*.
- **Kritéria rizika** – referenční hodnoty parametrů, podle kterých se hodnotí závažnost rizika.
- **Úroveň rizika** (stupeň rizika) – velikost rizika vyjádřená jako kombinace následků a jejich možností výskytu.
- **Hodnocení rizik** – proces porovnání výsledků *analýzy rizik* s *kritérii rizik* k určení, zda riziko a/nebo jeho velikost je přijatelné nebo tolerovatelné.
- **Ošetření rizika** – proces pro modifikování (změnu) rizika.
- **Zbytkové riziko** – riziko zbývající po *ošetření rizika*.

2.1.2 Posuzování rizik

Posuzování rizik zahrnuje hlavní úkoly procesu managementu rizik (rizikového inženýrství), které jsou vymezeny v normě ČSN ISO 31000 [1] a obsahuje následující prvky (viz obrázek 2.1):

- komunikaci a konzultaci (se zainteresovanými stranami);
- stanovení kontextu;
- posuzování rizik (zahrnuje identifikaci rizik, analýzu rizik a hodnocení rizik);
- ošetření rizika;
- monitorování a přezkoumání [4].



Obrázek 2.1: Proces managementu rizik [2]

Podle ČSN ISO 31000 a ČSN EN 31010 posuzování rizik není samostatnou činností, ale má být plně začleněno do dalších součástí v procesu managementu rizik [4].

Identifikace rizik

Podle ČSN EN 31010 [2] je identifikace rizik proces nalezení, rozpoznávání a zaznamenávání rizik. Účelem identifikace rizik je zjistit, co by se mohlo stát nebo jaké by mohly nastat situace, které by mohly ovlivnit dosažení cílů systému nebo organizace. Jakmile je riziko identifikováno, má organizace identifikovat jakékoli existující prvky řízení rizika, jako jsou např. vlastnosti návrhu, lidé, procesy a systémy [2, 4].

Proces identifikace rizik zahrnuje zjištění příčin a zdroje rizika, událostí, situací a okolností, které by mohly mít materiální dopad na cíle, a povahu tohoto dopadu.

Je mnoho technik, jak identifikovat rizika. Bez ohledu na to, jakou techniku využijeme, je důležité, aby byly náležitě rozpoznány lidské a organizační faktory [2].

Analýza rizik

Do analýzy rizik zahrnujeme určení následků a jejich pravděpodobností pro identifikované události rizika. Bereme v úvahu i přítomnost a efektivnost již existujících prvků řízení rizika. Následky a jejich pravděpodobnosti potom kombinujeme, abychom stanovili úroveň rizika [2].

Do analýzy rizik také zahrnujeme zohlednění příčin a zdrojů rizika, jejich následků a pravděpodobnosti, že se tyto následky mohou vyskytnout. Dále zahrnujeme odhad rozsahu potenciálních následků, které mohou vyplynout z události [2].

Metody použité při analyzování rizik mohou být *kvalitativní*, *semikvalitativní* nebo *kvantitativní*. Stupeň požadovaných podrobností bude záviset na určité aplikaci, dostupnosti spolehlivých dat a potřeb rozhodování organizace.

U kvalitativních metod stanovujeme následek, pravděpodobnost a úroveň rizika pomocí stupnice, kterou si zvolíme (např. úroveň „nízká“, „střední“ nebo „vysoká“) [2].

Semikvalitativní metody využívají pro následek a pravděpodobnost numerické klasifikační stupnice a tyto se pak kombinují s cílem stanovit úroveň rizika s použitím vzorce (použité vzorce mohou být různé). Při kvantitativní analýze jsou odhadnuty praktické hodnoty pro následky a jejich pravděpodobnosti a stanoví se hodnoty úrovně rizika ve specifických jednotkách [2].

Hodnocení rizik

Do hodnocení rizik je zahrnuto srovnání odhadovaných úrovní rizika s kritérii stanovenými při stanovení kontextu s cílem určit význam úrovně a typu rizika. Při hodnocení rizik se využívá pochopení rizika získaného během analýzy rizik za účelem rozhodnutí o budoucích zásazích. Jako vstupy pro tato rozhodnutí slouží etické, právní, finanční a jiné záležitosti včetně vnímání rizika [2].

K rozhodnutím mohou vést následující aspekty [2]:

- zdali riziko potřebuje ošetření;
- priority pro ošetření;
- zdali má být podniknuta nějaká činnost;
- kterou z řady cest je nutné se řídit.

O povaze rozhodnutí, která musí být učiněna, a o kritériích, která budou použita k rozhodování, se rozhodlo při stanovení kontextu, ale je nutné je podrobněji revidovat v etapě, kdy se ví víc o určitých identifikovaných rizicích [2].

Nejjednodušším rozdělením rizik podle kritérií je úroveň, kde jsou rizika rozdělena na ta, která potřebují ošetření, a na ta, která jej nepotřebují. Výsledky z takového postupu jsou sice jednoduché, ale nejsou v nich zahrnuty nejistoty při odhadování rizik (hranice mezi těmi, která ošetření potřebují a která ne) [2].

Rozhodnutí o ošetření rizika může být závislé na nákladech a přínosech při podstupování rizika a na nákladech a přínosech při zavedení zlepšených prvků řízení rizika.

Běžně rozdělujeme rizika na tři skupiny [2]:

- horní skupina, kde je úroveň rizika považována za nepřijatelnou bez ohledu na to, zda činnost může znamenat jakýkoli přínos a ošetření rizika je nezbytné za jakoukoli cenu;
- střední skupina, kde se berou v úvahu náklady i přínosy, a příležitosti jsou zvažovány vzhledem k potenciálním následkům;
- dolní skupina, kde je úroveň rizika považována za zanedbatelnou nebo tak malou, že nejsou potřebná žádná opatření k ošetření rizika [2].

2.1.3 Volba technik posuzování rizik

V ČSN EN 31010 [2] jsou definovány různé techniky pro posuzování rizik. Volba těchto technik by měla být vždy přiměřená povaze dané situace. Vhodné techniky by měly vykazovat následující charakteristiky [2]:

- mají být oprávněné a vhodné vzhledem k situaci nebo uvažované organizaci;
- mají poskytovat výsledky ve formě, která zdokonaluje pochopení povahy rizika a způsobů, jak může být riziko ošetřeno;
- mají být způsobilé k použití způsobem, který je patrný, opakovatelný a ověřitelný.

Mají být uvedeny důvody pro volbu technik s ohledem na důležitost a vhodnost. Z rozdílných studií by měly být výstupy srovnatelné [2].

2.1.4 Analýza stromu chyb - FTA

Analýza stromu chyb, někdy též označovaná jako Analýza stromu poruchových stavů (anglicky Fault tree analysis), je jednou z technik, které slouží k identifikaci a analýze faktorů, které mají vliv na vznik nežádoucí události. Tyto faktory jsou identifikovány deduktivně nejlépe skupinou expertů, poté jsou znázorněny tak jak jdou logicky za sebou pomocí obrázku v diagramu stromu. Tento strom zobrazuje příčinné faktory a jejich vztah k vrcholové události [2].

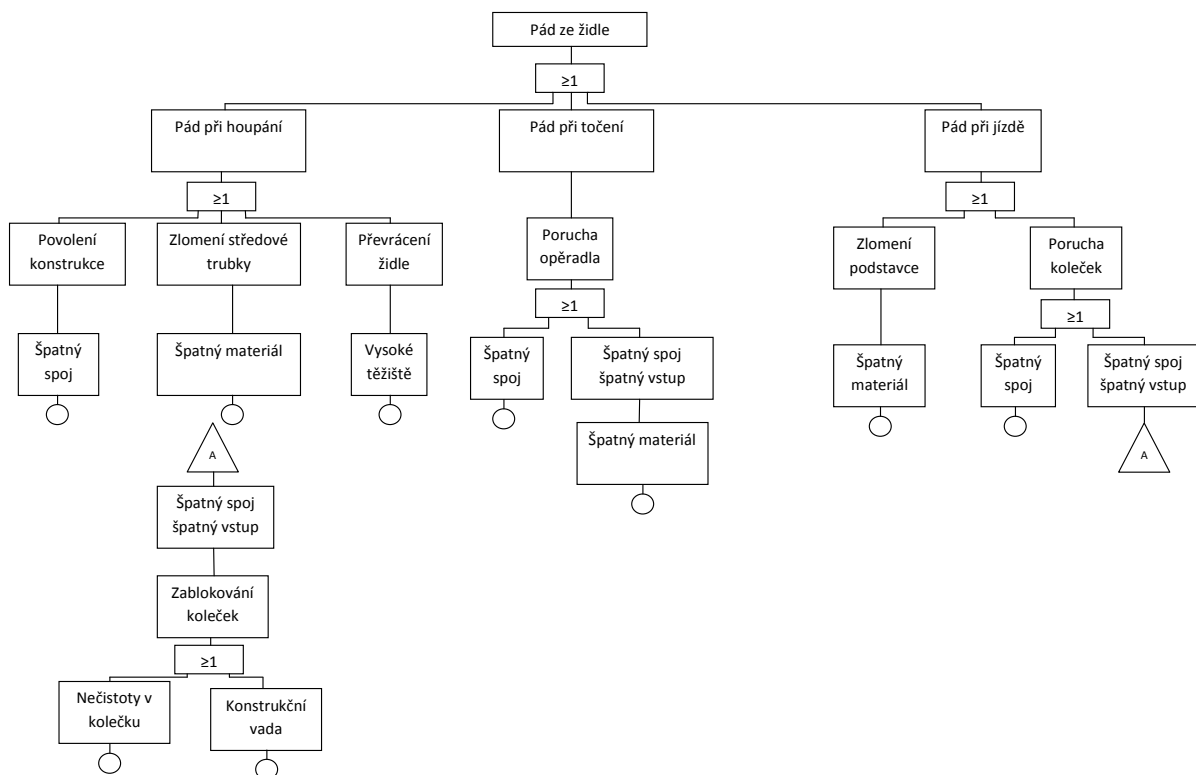
Analýza stromu chyb je grafickým vyjádřením možných poruch v soustavě. Grafické vyjádření je logickým diagramem, který znázorňuje logické vztahy mezi vrcholovou událostí, zvanou kořen stromu, a mezi příčinami vzniku této události. Vrcholová událost je vnější projev poruchy soustavy, např. nefunkčnost prvku či vazby v soustavě [5]. Při realizaci FTA se používá systémová metodologie, aplikuje se systémový přístup a systémové myšlení. Procesy, které jsou zkoumány, se analyzují ve vztahu ke vzniku mezních stavů [5].

Strom poruch je možné použít kvalitativně s cílem identifikovat možné příčiny a cesty, které vedou k poruše, nebo kvantitativně s cílem vypočítat pravděpodobnost vrcholové události, pokud známe pravděpodobnosti příčinných událostí [2]. Hlavním důvodem, proč se FTA vypracovává je, že chceme analyzovat pravděpodobnost selhání celé soustavy a následně navrhnout preventivní opatření, která by měla zvýšit spolehlivost soustavy [5].

Kroky k vypracování stromu poruch jsou v [2] uvedeny tyto:

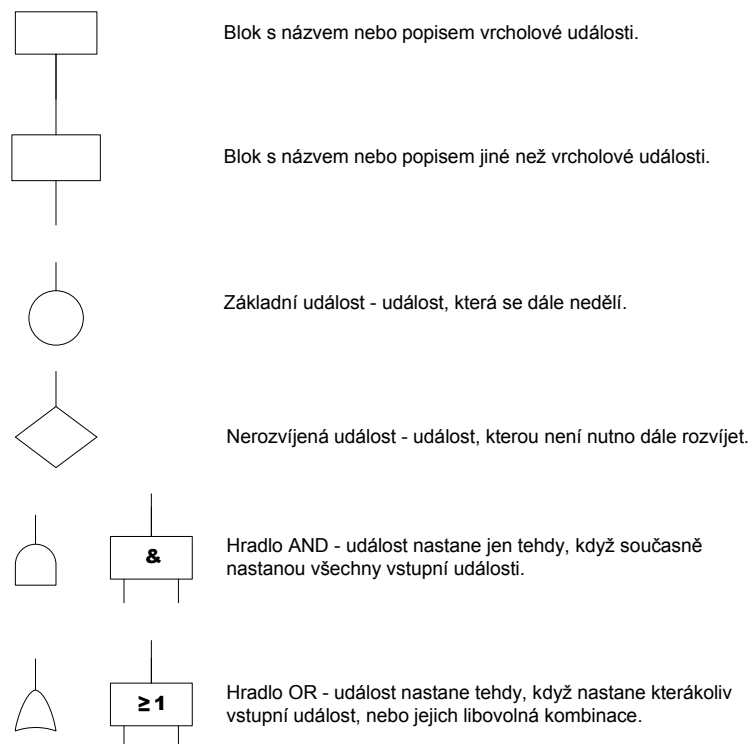
- Je přesně vymezena vrcholová událost, kterou je potřeba analyzovat. Vrcholovou událostí rozumíme poruchu nebo výsledek, který z této poruchy vyplývá.
- Z vrcholové události vyplývají příčiny nebo způsoby poruch, které k této vrcholové události vedou.
- Každá z těchto poruch je analyzována. Cílem je identifikovat, jak by mohla být způsobena.
- Postupuje se směrem k nižším úrovním systému (provozu) do té doby, než se další analýza stane neproduktivní. Pokud dojdeme k nejnižší úrovni, jsou tyto příčinné faktory označeny jako základní události.

Nejdůležitějším výstupem z analýzy stromu poruch je grafické znázornění, jak může dojít k vrcholové události. Grafická reprezentace vede ke snadnému pochopení chování systému [2]. Ukázku analýzy stromu poruch lze vidět na obrázku 2.2.



Obrázek 2.2: Ukázka analýzy stromu chyb

Strom poruch je vytvářen pomocí grafických symbolů a spojek – tzv. hradel, které představují vzájemné logické vazby mezi událostmi a jejich bezprostředními příčinami. Tyto grafické symboly jsou znázorněny na obrázku 2.3.



Obrázek 2.3: Symboly používané v analýze stromu chyb

2.2 Markovovy řetězce

Markovova analýza patří mezi analytické metody hodnocení rizik, založené na pravděpodobnostním přístupu [4]. V následující kapitole je popsáno několik základních poznatků o Markovových řetězcích a jejich vlastnosti. Pojmem Markovův řetězec rozumíme stochastický (náhodný) proces, který má Markovovskou vlastnost. To znamená, že pravděpodobnost přechodu procesu z jednoho stavu do druhého, je nezávislá na jeho předchozích stavech. Toto chování označujeme jako *bezpečné*. Při přechodu z určitého stavu do stavu následujícího je možno zapomenout historii celého procesu. Tato metoda je běžně používána k analýze opravitelných systémů, které mohou existovat v četných stavech [4].

2.2.1 Použití a aplikace Markovových řetězců

Techniku Markovovy analýzy lze použít na procesy s opakováním nebo bez opakování a zahrnuje [2]:

- nezávislé součásti uspořádané paralelně;
- nezávislé součásti v sérii;

- systém sdílení zátěže;
- pohotovostní systém včetně případu, kdy se může objevit porucha přepínání;
- zhoršené (degradované) systémy.

Techniku Markovovy analýzy lze také použít k výpočtu pohotovosti včetně zohlednění náhradních součástí vyčleněných k opravě [2].

Pro vytvoření Markovovy analýzy potřebujeme seznam různých stavů, ve kterých systém může být, musíme pochopit možné přechody mezi jednotlivými stavy a intenzitu změny z jednoho stavu na druhý, která je většinou zastoupená pravděpodobností [2].

Jako příklad k ilustraci uvažujme systém, který se nachází ve třech stavech: funkční – S_1 , zhoršený – S_2 a nefunkční – S_3 . Každý den se systém nachází v jednom z těchto tří stavů. V tabulce 2.1 je zobrazena pravděpodobnost, že zítra bude systém ve stavu S_i , kde $i = 1, 2, 3$ [2].

Tabulka 2.1: Markovova matice [2]

		Zítřejší stav		
		S1	S2	S3
Dnešní stav	S1	0,95	0,3	0,2
	S2	0,04	0,65	0,6
	S3	0,01	0,05	0,2

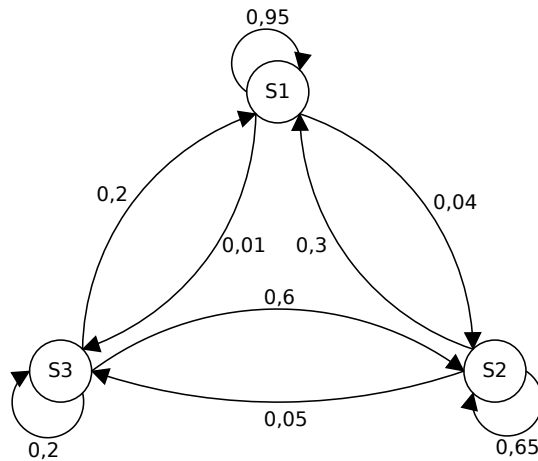
Tomuto uspořádání pravděpodobností se říká Markovova matice (matice přechodů). Součet každého sloupce v této matici je 1, protože pravděpodobnost všech možných výsledků nám v součtu dá dohromady 100 %. Pravděpodobnost větší než 100 % není možná. Dalším možným znázorněním systému a jeho přechodů mezi jednotlivými stavy je Markovův diagram (na obrázku 3.4). Kruhy v tomto diagramu představují stavy a šipky znázorňují pravděpodobnosti pro přechody do těchto stavů [2].

Pravděpodobnost P_i označuje skutečnost, že se systém nachází ve stavu $i = 1, 2, 3$. Pro výpočet pravděpodobností z obrázku dostaneme soustavu rovnic [2]:

$$P_1 = 0,95P_1 + 0,30P_2 + 0,20P_3 \quad (2.1)$$

$$P_2 = 0,04P_1 + 0,65P_2 + 0,60P_3 \quad (2.2)$$

$$P_3 = 0,01P_1 + 0,05P_2 + 0,20P_3 \quad (2.3)$$



Obrázek 2.4: Markovův diagram procesu [2]

Tyto tři rovnice nejsou nezávislé a nevyřeší tyto tři neznámé. Použijeme rovnici následující a z výše uvedených rovnic jednu vyřadíme.

$$1 = P_1 + P_2 + P_3 \quad (2.4)$$

Řešením těchto rovnic dostaneme výsledky $P_1 = 0,85$, $P_2 = 0,13$ a $P_3 = 0,02$. Systém je po 85 % doby plně funkční, po 13 % doby ve zhoršeném stavu a po 2 % doby v poruše [2].

2.2.2 Základní pojmy

Podle [3] jako *stochastický dynamický diskretní systém* (dále jen *systém*) \mathbf{X} bereme uspořádanou dvojici $(\Omega; \mathbf{P}(n))$, kde

- $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_j, \dots\}$ je *stavový prostor*,
- ω_j jsou *stavy systému* \mathbf{X} , $j = 1, 2, \dots$,
- $\mathbf{P}(n) = [p_1(n), \dots, p_j(n), \dots]$ je *matice rozdělení pravděpodobnosti stavů systému* \mathbf{X} po n krocích, $n = 0, 1, \dots$, kde $p_j(n)$ vyjadřuje pravděpodobnost toho, že systém \mathbf{X} je po n krocích ve stavu ω_j .

Speciálně $\mathbf{P}(0)$ je *matice počátečního rozdělení pravděpodobnosti stavů systému* \mathbf{X} (tj. před prvním krokem), kde $p_j(0)$ je pravděpodobnost toho, že systém \mathbf{X} je na počátku ve stavu ω_j [3].

Pokud položíme $\omega_j = j$, potom stavový prostor má tvar $\Omega = \{1, 2, \dots\}$. Stav systému \mathbf{X} po n krocích je pak vyjádřen diskretní náhodnou veličinou X_n s rozdělením pravděpodobnosti $\mathbf{P}(n)$, která nabývá hodnot $j = 1, 2, \dots$ [3].

Posloupnost $\{X_n\}$ diskretních náhodných veličin X_n , $n = 0, 1, \dots$ se nazývá *Markovův řetězec*, jestliže pro každý index $k = 1, 2, \dots$ a pro všechny možné hodnoty i, j, h, \dots náhodných veličin X_n je

$$P(X_k = j / X_{k-1} = i, \dots, X_0 = h) = P(X_k = j / X_{k-1} = i). \quad (2.5)$$

Podmíněná pravděpodobnost $p_{ij,k} = P(X_k = j / X_{k-1} = i)$ je *pravděpodobnost přechodu systému \mathbf{X} v k -tém kroku ze stavu i do stavu j* . Vztah předchozí je vyjádřením bezpaměťového chování Markovových řetězců [3].

Přechod systému \mathbf{X} v k -tém kroku ze stavu i do stavu j popisuje *matice pravděpodobností přechodu pro k -tý krok* [3]

$$\mathbf{P}_k = \begin{pmatrix} p_{11,k} & p_{12,k} & p_{13,k} & \dots \\ p_{21,k} & p_{22,k} & p_{23,k} & \dots \\ p_{31,k} & p_{32,k} & p_{33,k} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

kde $\sum_j p_{ij,k} = 1$ pro všechna $i = 1, 2, \dots$

Pokud je pravděpodobnost přechodu $p_{ij,k}$ na hodnotě k závislá, nazýváme proces jako *nehomogenní Markovův řetězec*. Naproti tomu v případě *homogenního Markovova řetězce* je pravděpodobnost přechodu $p_{ij,k}$ na k nezávislá. Pro všechny hodnoty i, j, k platí $p_{ij,k} = p_{ij}$. Matice *pravděpodobností přechodu homogenního Markovova řetězce* je konstantní a značí se [3]

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \dots \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \dots \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Pravděpodobnost $p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j / X_0 = i)$, že systém \mathbf{X} přejde ze stavu i do stavu j právě po n krocích, $n = 1, 2, \dots$, je *pravděpodobnost přechodu za n kroků*. Matice $\mathbf{P}^{(n)}$ s prvky $p_{ij}^{(n)}$ je *matice pravděpodobností přechodu za n kroků* [3].

2.2.3 Některé vlastnosti Markovových řetězců

K popisu některých vlastností Markovových řetězců slouží tyto pojmy [3]:

- Markovův řetězec $\{X_n\}$ chápeme jako *konečný*, jestliže má konečný počet stavů. V technické praxi se využívají většinou právě konečné Markovovy řetězce.
- Pokud existuje takové $n = 1, 2, \dots$, že $p_{ij}^{(n)} > 0$, nazýváme stav j *dosažitelný* ze stavu i .
- Je-li každý stav Markovova řetězce dosažitelný z libovolného jiného stavu, nazýváme tento řetězec *nerozložitelný*.
- Stav Markovova řetězce $\{X_n\}$ se nazývá *absorbující*, jestliže z něj není možné přejít do jiného stavu. Celý řetězec se nazývá *absorbující*, jestliže má alespoň jeden absorbující stav a z každého stavu lze přejít do absorbujícího stavu (není nutnost, aby tento přechod byl způsoben pouze jedním krokem). Dosažením některého absorbujícího stavu je řetězec absorbován.
- Pokud se návrat systému do libovolného stavu může uskutečnit v počtu kroků, vynásobených vhodným přirozeným číslem, je řetězec *periodický* [3].

V následujících odstavcích se zaměříme na *konečný homogenní Markovův řetězec* se stavovým prostorem $\{1, \dots, a+b\}$, kde a je počet absorbujících a b je počet neabsorbujících stavů. Když stavy řetězce přerovnáme tak, aby právě prvních a stavů bylo absorbujících, dostaneme matici pravděpodobností přechodu v tzv. *kanonickém tvaru* [3]

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{I}_a & \mathbf{0} \\ \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad (2.8)$$

kde \mathbf{I}_a je jednotková matice typu (a, a) , $\mathbf{0}$ je nulová matice typu (a, b) , \mathbf{R} je matice typu (b, a) a \mathbf{Q} je čtvercová matice typu (b, b) [3]. Platí, že

$$\mathbf{P}^n = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{I}_a & \mathbf{0} \\ * & \mathbf{Q}^n \end{pmatrix} \end{matrix}. \quad (2.9)$$

Matici (b, a) , označenou symbolem $*$ není nutno uvažovat. Prvky matice \mathbf{Q}_n udávají pro každý neabsorbující stav pravděpodobnost toho, že řetězec je po n krocích v některém z možných neabsorbujících stavů. Uvažujme, že pravděpodobnost toho, že je řetězec po n krocích v neabsorbujícím stavu, se blíží nule. Potom se blíží nule každý prvek matice \mathbf{Q}^n pro $n \rightarrow \infty$ a $\mathbf{Q}^n \rightarrow 0$ (0 je nulová čtvercová matice typu b). Z uvedeného plyne, že k matici $\mathbf{I}_b - \mathbf{Q}$ existuje inverzní matice, pro kterou platí $(\mathbf{I}_b - \mathbf{Q})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{Q}^k$. Matici $\mathbf{M} = (\mathbf{I}_b - \mathbf{Q})^{-1}$ nazýváme *fundamentální maticí* absorbujícího homogenního Markovova řetězce (\mathbf{I}_b je jednotková matice typu b) [3].

Pro aplikace platí tato tvrzení [3]:

1. Prvek m_{ij} fundamentální matice \mathbf{M} je roven střední hodnotě počtu případů, kdy je řetězec v neabsorbujícím stavu j za předpokladu, že počátečním stavem byl neabsorbující stav i .
2. Vynásobením fundamentální matice \mathbf{M} maticí \mathbf{c} typu $(b, 1)$, jejíž prvky jsou rovny 1, dostaneme prvek $\mathbf{t}_{i1} = \mathbf{M}\mathbf{c}$. Prvek \mathbf{t}_{i1} je roven střednímu počtu kroků před absorbováním, tedy přechodu řetězce ze stavu i do libovolného absorbujícího stavu.
3. Prvek b_{ij} matice $\mathbf{B} = \mathbf{M}\mathbf{R}$ (\mathbf{R} je matice typu (b, a)) je roven pravděpodobnosti, že absorbující řetězec bude absorbován ve stavu j za předpokladu, že začal v neabsorbujícím stavu i [3].

Tvrzení 1 umožňuje určit, kolikrát v průměru bude homogenní řetězec v každém neabsorbujícím stavu. Tvrzení 2 řeší problém, za jak dlouho bude průměrně proces absorbován. Z tvrzení 3 se dá určit pravděpodobnost, že proces bude končit v daném absorbujícím stavu [3].

Aplikace Markovových řetězců v úlohách spočívají především ve stanovení *odhadů pravděpodobností přechodu*, případně *testování statistických hypotéz* o nich (na základě realizace posloupnosti pokusů, při nichž získáme posloupnost pozorovaných stavů systému \mathbf{X} [3]. Pro konečný homogenní řetězec s q stavy dostaneme *maximálně věrohodné odhady pravděpodobností přechodu* ze vztahu

$$p_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_{i\bullet}} \text{ pro } i, j = 1, 2, \dots, q, \quad (2.10)$$

kde n_{ij} jsou pozorované četnosti přechodu systému \mathbf{X} ze stavu i do stavu j v posloupnosti n pokusů a $n_{i\bullet} = \sum_{j=1}^q n_{ij}$ jsou pozorované marginální četnosti přechodu systému

X ze stavu i do libovolného stavu [3].

2.3 Základy fuzzy logiky

V této kapitole jsou popsány základní operace s fuzzy množinami, které jsou využity pro výpočty v praktické části diplomové práce.

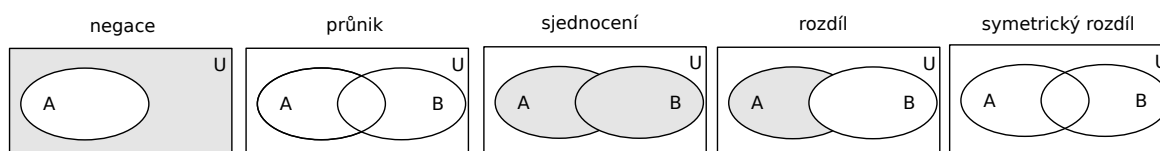
2.3.1 Klasické množiny

Základní pojmy z teorie množin

Množina je soubor prvků libovolného druhu. Pojmy *množina* a *prvek* chápeme jako základní a nejsou definovány pomocí jiných pojmů [6].

Ke každé množině A existuje množina všech jejích podmnožin. Prvek x , který patří do množiny A , značíme zápisem $x \in A$. Klasické množiny mohou být konečné, spočetné nebo nespočetné. Mohou být definovány výčtem všech prvků, které do množiny patří, nebo definicí vlastností, která určuje příslušnost prvků do množiny. Velmi důležité jsou dvě základní množiny, a to univerzum, kterou budeme značit U , obsahující všechny prvky a prázdná množina \emptyset neobsahující žádný prvek [6, 7].

S klasickými množinami lze provádět základní operace, které jsou popsány v [6], jako vidíme na obrázku 2.5.



Obrázek 2.5: Grafické znázornění operací mezi množinami [6]

Charakteristická funkce

Dalším způsobem definování množiny je pomocí charakteristické funkce. Tento způsob je užitečný hlavně pro zobecnění klasických množin na fuzzy množiny [6].

Zobrazení $\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$ nazveme *charakteristickou funkcí* množiny A právě tehdy, jestliže pro všechna x platí

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in A \\ 0 & \text{pro } x \notin A \end{cases}. \quad (2.11)$$

Hodnota 1 značí, že prvek do množiny A patří, hodnota 0 udává, že prvek do množiny A nepatří [6].

2.3.2 Relace

Máme dána univerza X a Y , jejichž kartézský součin je $U = X \times Y$. *Binární relací* R nazýváme množinu uspořádaných dvojic z U , tj. podmnožinu $R \subseteq U$. Pojem relace lze rozšířit na množinu uspořádaných n -tic. Jsou-li X_1, \dots, X_n univerza, potom n -*nární relace* R je množina uspořádaných n -tic z kartézského součinu $X_1 \times \dots \times X_n$ [6].

Vyjádření operací nad množinami pomocí charakteristických funkcí

Charakteristickou funkcí můžeme vyjádřit operaci doplňku, průniku a sjednocení dvou množin [6]:

Doplňek množiny A , tj. \overline{A} :

$$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x). \quad (2.12)$$

Průnik množin A, B , tj. $A \cap B$:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)). \quad (2.13)$$

Sjednocení množin A, B , tj. $A \cup B$:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)). \quad (2.14)$$

Výběr operací v těchto definicích je libovolný. Musí být pouze splněny podmínky korektnosti pro jednotlivé operace, tzn. že charakteristická funkce průniku musí vrátit hodnotu 1, právě když nabývají obě dílčí charakteristické funkce hodnotu 1. Operátor minima tuto podmínku splňuje, ale charakteristickou funkcí průniku dvou množin můžeme

definovat i jinak, např. takto [6]:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \text{ nebo} \quad (2.15)$$

$$\mu_{A \cap B}(x) = \max(0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1). \quad (2.16)$$

V klasické teorii množin nejsou tyto definice užívány, neboť dávají stejný výsledek jako předchozí rovnice. Jiná ale bude situace v teorii fuzzy množin. To je hlavní důvod, proč jsou tyto definice zmíněny v této kapitole [6, 7].

2.3.3 Fuzzy množiny

Využití teorie fuzzy množin je zcela jiný alternativní způsob popisu náhodného jevu. Prostřednictvím fuzzy množin je možné velice snadno definovat „neostrou“ hranici mezi např. vyhovující a nevyhovující hodnotou sledované veličiny. Fuzzy logika je založena na myšlence, že určujícím prvkem lidského myšlení nejsou čísla, ale *názvy*, tj. třídy objektů, ve kterých se příslušnost k dané třídě mění pozvolna, nikoli skokem. Základní problém, se kterým se setkáváme, formuloval zakladatel teorie fuzzy množin L.A. Zadeh [4, 8]. Tzv. *fuzzy přístup* nám tedy umožňuje pracovat s vágními pojmy, jejichž vyjádření je sice nepřesné, ale tato skutečnost je vyvážena tím, že problém zpracováváme v celé své složitosti, bez zavedení zjednodušujících předpokladů [4, 8].

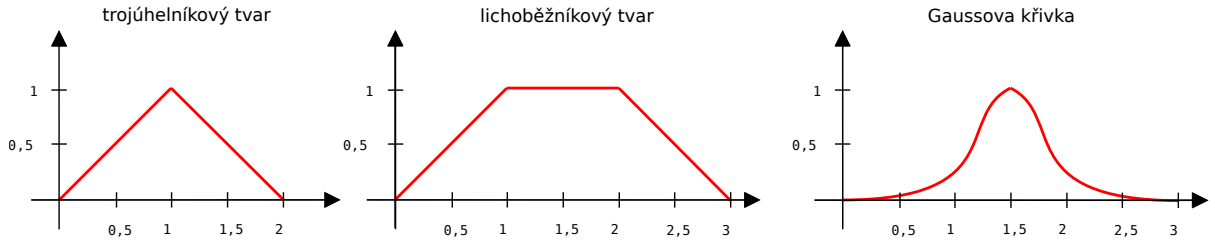
V klasické teorii množin uvažujeme pro prvek pouze dva stavy, a to zda do množiny patří či nikoli. Tuto vlastnost jsme si již popsali v kapitole 2.3.1 [6].

V teorii fuzzy množin užíváme pro klasickou množinu výraz *ostrá množina*. Tato vlastnost je potom zobecněna, tzn. že nemusí platit pouze dvě možnosti (zda prvek do množiny patří či nepatří). Prvek může do fuzzy množiny patřit jen částečně [6, 7]. Pro fuzzy množiny zavádíme pojem *funkce příslušnosti*, která mapuje univerzum na celý interval $\langle 0; 1 \rangle$. Je to charakteristická funkce, která znázorňuje, do jaké míry je x prvkem fuzzy množiny:

$$\mu_F : U \rightarrow \langle 0; 1 \rangle. \quad (2.17)$$

Hodnota $\mu(x)$ prvku je tzv. stupeň příslušnosti. Fuzzy množina F je potom jednoznačně určena uspořádanou dvojicí (μ_F, U) [4, 8].

Pro vyjádření funkce příslušnosti se v technických aplikacích používají tři základní tvary funkcí. Je to tvar trojúhelníku, lichoběžníku a Gaussovy křivky (viz obrázek 2.6).



Obrázek 2.6: Tři základní tvary funkcí příslušnosti [6]

Vlastnosti fuzzy množin a operace s nimi

Zdroj [6] uvádí, že pokud je fuzzy množina složena z konečného počtu n dvojic, můžeme ji jednoznačně určit výčtem těchto dvojic. Zavedeme-li pro symbol výčtu znaménko „+“, potom lze tuto množinu psát jako

$$F = \sum_{i=1}^n \mu_F(u_i)/u_i. \quad (2.18)$$

Definujeme-li tedy množinu na diskrétním konečném nebo spočetném univerzu U , můžeme ji zkráceně zapsat jako

$$F = \sum_{u \in U} \mu_F(u)/u. \quad (2.19)$$

Je-li univerzum spojitě nebo nespočetné, potom pro symbol výčtu použijeme místo symbolu sumace symbol integrálu

$$F = \int_U \mu_F(u)/u. \quad (2.20)$$

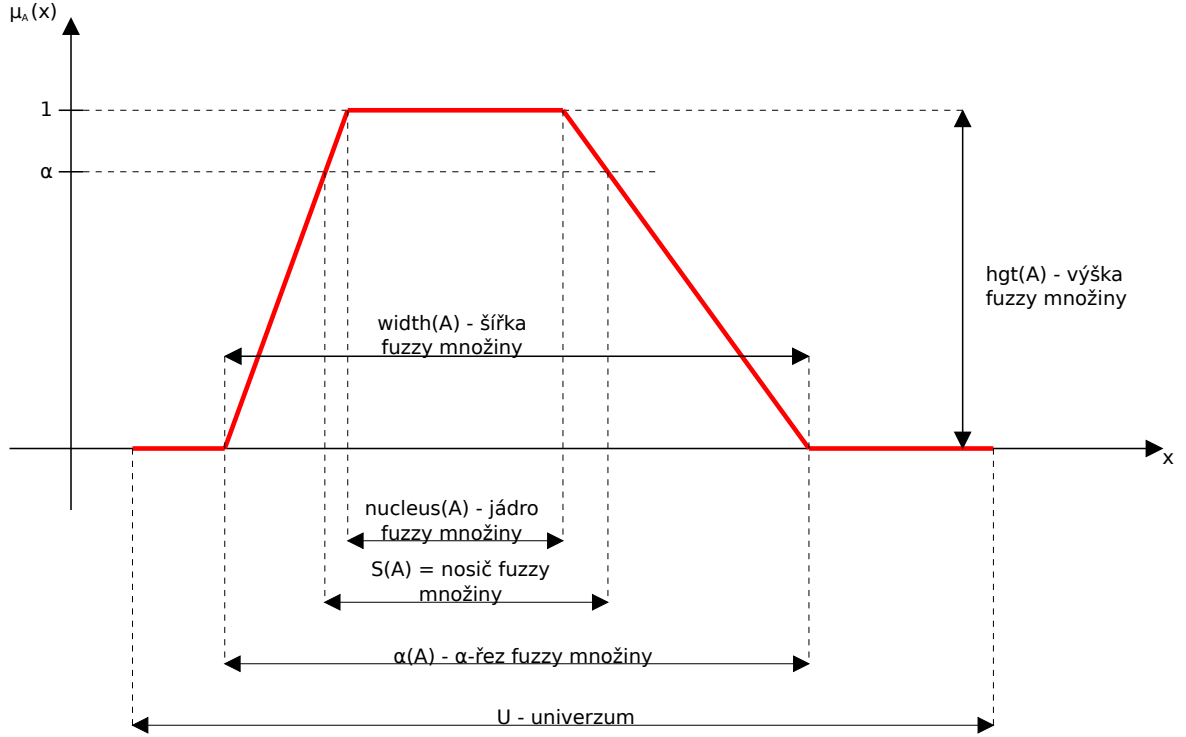
Předpokládáme, že A je fuzzy množina definovaná na univerzu U . Na obrázku 2.7 vidíme některé základní pojmy týkající se vlastností fuzzy množin.

Tyto pojmy si objasníme v následujícím odstavci [6, 8, 7]:

- *Obor hodnot*: $\text{Range}(A) = \{\alpha \in \langle 0, 1 \rangle : (\exists x \in U : \mu_A(x) = \alpha)\}$,
- *Nosič (support)* fuzzy množiny A je ostrá množina S definovaná jako množina všech prvků univerza U , které mají kladnou funkci příslušnosti, tj.

$$S(A) = \{x \in U, \mu_A(x) > 0\}. \quad (2.21)$$

- Fuzzy množina A se nazývá *konvexní* právě tehdy, jestliže pro každé dva prvky



Obrázek 2.7: Základní pojmy fuzzy množin [6]

$x, y \in U$, kde U je lineární prostor, a pro každé $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ platí:

$$\mu_A(\lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y) \geq \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}, \quad (2.22)$$

tj. jestliže hodnota funkce příslušnosti v libovolném bodě, který leží mezi body x a y (jeho poloha je dána velikostí parametru λ), je větší než nejmenší z obou krajních hodnot $\mu_A(x), \mu_A(y)$. Tento pojem je zobecněním konvexnosti u ostrých množin na fuzzy množiny.

- Šířka (*width*) konvexní fuzzy množiny A s nosičem $S(A)$ je definována jako

$$width(A) = \sup(S(A)) - \inf(S(A)). \quad (2.23)$$

- Jádro (*nucleus*) fuzzy množiny A je definováno jako ostrá množina $nucleus(A)$ všech prvků, jejichž funkce příslušnosti je rovna 1, tj.

$$nucleus(A) = \{x \in U, \mu_A(x) = 1\}. \quad (2.24)$$

- Výška (*height*) fuzzy množiny A označovaná $hgt(A)$ je definována jako

$$hgt(A) = \sup(\mu_A(x)), x \in U. \quad (2.25)$$

Pokud se výška fuzzy množiny rovná 1, tj. $hgt(A) = 1$ pak tuto množinu nazýváme *normální*. V opačném případě tuto množinu nazveme *subnormální*.

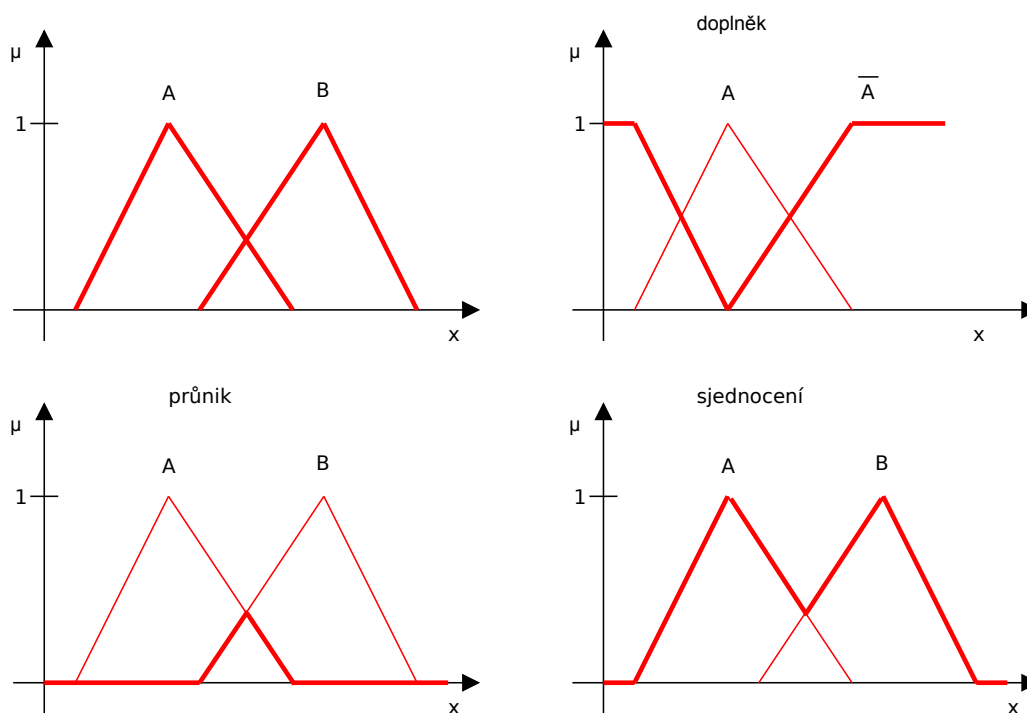
Stejně jako u klasických množin lze s fuzzy množinami provádět operace průniku, sjednocení, doplňku atd. Zadeh zavádí operaci průniku, sjednocení a doplňku pro všechna $x \in U$ takto:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)), \quad (2.26)$$

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)), \quad (2.27)$$

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x). \quad (2.28)$$

Tyto operace jsou graficky zobrazeny na obr. 2.8 [6].



Obrázek 2.8: Operace mezi fuzzy množinami [6]

Tyto operace lze definovat i jiným způsobem (viz [6]). Záleží na konkrétní situaci, která z definicí je vhodnější. Obecným přístupem k problematice operací průniku jsou

pojmy *triangulární normy* (*t-normy*) a *triangulární t-konormy* (*s-normy*). Jsou-li dána čísla $a, b, c, d \in \langle 0, 1 \rangle$, potom *t-norma* $t(a, b) = a \widehat{*} b$ je binární operací, která je obecným operátorem průniku a splňuje určité axiomy [6]. *S-norma* $s(a, b) = a \underline{*} b$ je binární operací, která je zobecněným operátorem sjednocení a splňuje také určité axiomy. Těchto operací je celá řada. Některé z nich jsou uvedeny v [6].

Princip rozšíření

Pro použití v praxi potřebujeme s fuzzy množinami umět provádět také složitější operace, než klasické množinové. Jedním z nejdůležitějších principů, který umožňuje převést libovolnou operaci v klasických množinách na operaci ve fuzzy množinách, je tzv. *princip rozšíření* (*extension principle*) [6, 8]. Máme dvě univerza U, V a funkci f , která mapuje U na V . Dále máme fuzzy množinu $A, A \subseteq U$. Fuzzy množina A indukuje v univerzu V fuzzy množinu, jejíž funkce příslušnosti je:

$$\mu_f(y) = \begin{cases} \sup_{y=f(x)} \{\mu_A(x)\} & \text{jestliže existuje } x \in U \text{ takové, že } y = f(x) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}. \quad (2.29)$$

Označení *sup* znamená *supremum* přes všechna x taková, že $x \in U, f(x) = y$. Operace *supremum* je v matematice obecně definována jako nejmenší horní závora, zde ji z praktických důvodů nahrazujeme operací *maximum* [6, 8]. V technické praxi lze tento princip používat pro práci s tzv. *fuzzy reálnými čísly*.

Fuzzy čísla

Tzv. *fuzzy reálná čísla* jsou konvexní normální fuzzy množiny definované na univerzu reálných čísel, jejichž funkce příslušnosti je po částech spojitá funkce. Dále pro fuzzy čísla platí, že jádro je jednoprvková množina. Existuje tedy pouze jedna hodnota a , pro kterou platí $\mu_A(a) = 1$. Fuzzy číslo lze chápat jako hodnotu, která je zatížena určitou nepřesností. V praxi jsou to například všechny výsledky laboratorních zkoušek. Fuzzy čísla umožňují jednoduchou reprezentaci těchto nepřesností [6, 8].

Fuzzy aritmetika

Jedním způsobem, jak provádět základní aritmetické operace s fuzzy čísly (*součet, rozdíl, součin a podíl*), je použít princip rozšíření. Označíme si symbolem „ $*$ “ libovolnou z těchto čtyř operací. Budeme-li mít fuzzy čísla A, B (fuzzy množiny definované na reálné ose), bude funkce příslušnosti výsledku aritmetické operace vypadat takto [6]:

$$\mu_{A*B}(z) = \sup_{x,y,z=x*y} \min(\mu_A(x), \mu_B(y)). \quad (2.30)$$

Přitom podíl je definován jen pro takové B , jehož nosič neobsahuje číslo 0 [6, 7, 8].

Protože provádění takovýchto operací podle rovnice 2.30 je nepraktické, zavádíme pojem α -řez. Tento řez fuzzy čísla je uzavřený interval a na tyto intervaly můžeme použít *intervalovou aritmetiku*. Použijeme-li fuzzy čísla A, B z předchozího odstavce, a aritmetické operace opět označíme symbolem „ $*$ “, dostaneme s využitím α -řezů těchto čísel α -řez výsledku operace jako všeobecnou rovnici:

$$\alpha(A * B) = \alpha(A) * \alpha(B). \quad (2.31)$$

Konstrukce těchto řezů je velmi jednoduchá, v podstatě se jedná o „rozřezání“ funkce příslušnosti fuzzy množiny (fuzzy čísla) na intervaly, se kterými potom můžeme pracovat pomocí známých matematických nástrojů [6, 8, 7].

2.3.4 Fuzzy logika a fuzzy systémy

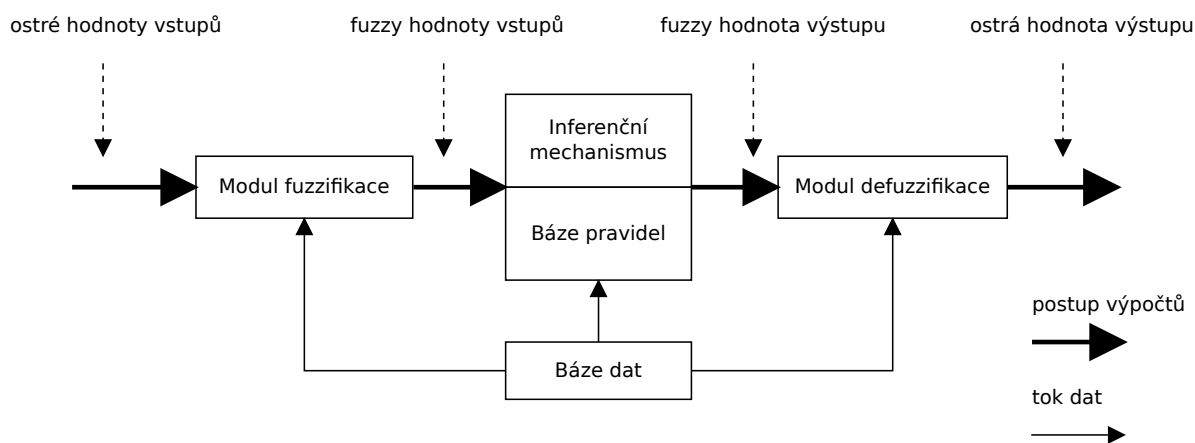
Fuzzy logika vznikla jako podobor klasické matematické logiky, která není schopná pracovat s nejasnými pojmy, ale pouze s konkrétními čísly [5]. Fuzzy logika pracuje s *jazykovými proměnnými*, tzv. *fuzzy výroky*, které mají slovní vyjádření. Toto slovní vyjádření potom definujeme pomocí fuzzy množin, které mohou nabývat pravdivostních hodnot z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Fuzzy výroky mohou být propojeny logickými spojkami *and* nebo *or* a dohromady tím vytvářejí *ascendent* (nebo-li předpoklad) pravidla

$$\textit{if (fuzzy výrok) then (fuzzy výrok)}.$$

Toto pravidlo představuje *fuzzy implikaci*. Výsledkem tohoto pravidla je *konsekvent*. *Ascendent* je fuzzy výrok před částicí „*then*“ a *konsekvent* je fuzzy výrok za částicí „*then*“ [6].

Základní jednotkou reprezentující znalost je *jazyková (lingvistická) proměnná*, jejíž hodnoty jsou slova nebo věty přirozeného jazyka. Např. jazyková proměnná *zatížení* může nabývat hodnot *velmi malé*, *malé*, *střední*, *velké* atd. a nikoliv číselných hodnot 10 kN, 30 kN, 100 kN apod. Parametrem jazykové proměnné je *symbolické jméno* x , *množina slovních hodnot*, kterých může nabývat, a *číselný rozsah*, tj. univerzum U_x , ve kterém se daná veličina pohybuje. Mezi těmito hodnotami musí být dáno přiřazení, tzn. že musí být dána funkce M_x , která mapuje slovní hodnoty do hodnot univerza. Fuzzy výroky můžeme pomocí logických spojek mezi sebou různě skládat a vytvářet tak *složené fuzzy výroky*, s nimiž potom pracujeme na základě pravidel definovaných v [5, 6].

V technických aplikacích se často setkáme s použitím *fuzzy inference systémů* jako nástrojů pro rozhodování, řízení a modelování procesů. Vstupní hodnoty pro tento systém získáváme jako ostré hodnoty a stejně tak jsou ostrými hodnotami výstupní veličiny. Fuzzy systém je v tomto případě doplněn o modul *fuzziifikace* a modul *defuzziifikace*. V modulu fuzziifikace dochází k přeměně ostré hodnoty na fuzzy množinu, defuzziifikace je přesným opakem, tedy z fuzzy množiny dostáváme převodem ostrou hodnotu. Takový fuzzy inferenční systém vidíme i s popisem na obrázku 2.9 [6, 8].



Obrázek 2.9: Struktura fuzzy systému [6]

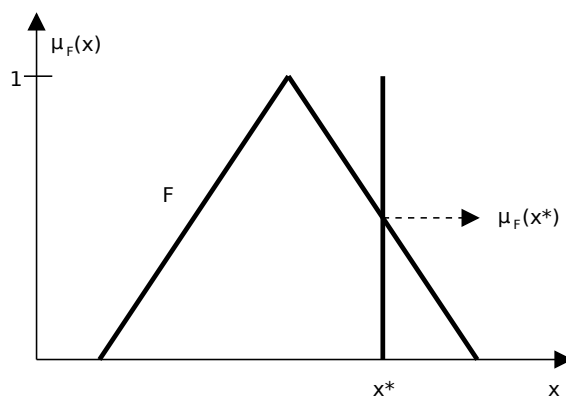
Znalostní báze (knowledge base) ve fuzzy systému rozumíme bázi pravidel a bázi dat. Báze dat obsahuje údaje o fuzzy množinách (jejich tvar a polohu v univerzu) všech proměnných v systému. Báze pravidel obsahuje všechna pravidla fuzzy systému. V inferenčním mechanismu postupně dochází k vyhodnocování všech pravidel a výsledky jsou

zapsány do jedné fuzzy množiny [6].

Cílem fuzzifikace je transformovat ostrou hodnotu x^* proměnné x na fuzzy množinu. Vstupní ostrou hodnotu považujeme za fuzzy číslo se speciálním typem funkce příslušnosti, tzv. singletonem. Toto číslo tak patří do fuzzy množiny F s příslušností $\mu_F(x^*)$. Fuzzifikaci provádíme na základě vztahu

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & x = x^* \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}. \quad (2.32)$$

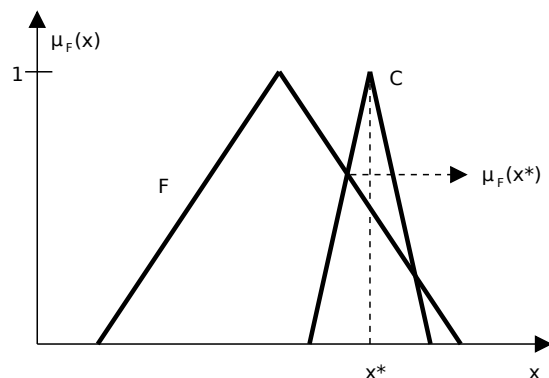
Tento způsob je nejpoužívanější a nazývá se *fuzzifikace singletonem* (viz obrázek 2.10). Dalším způsobem je *fuzzifikace trojúhelníkovou fuzzy množinou C* (obrázek 2.11). Tato veličina může vyjadřovat neurčitost vstupující hodnoty [6, 8].



Obrázek 2.10: Fuzzifikace singletonem [6]

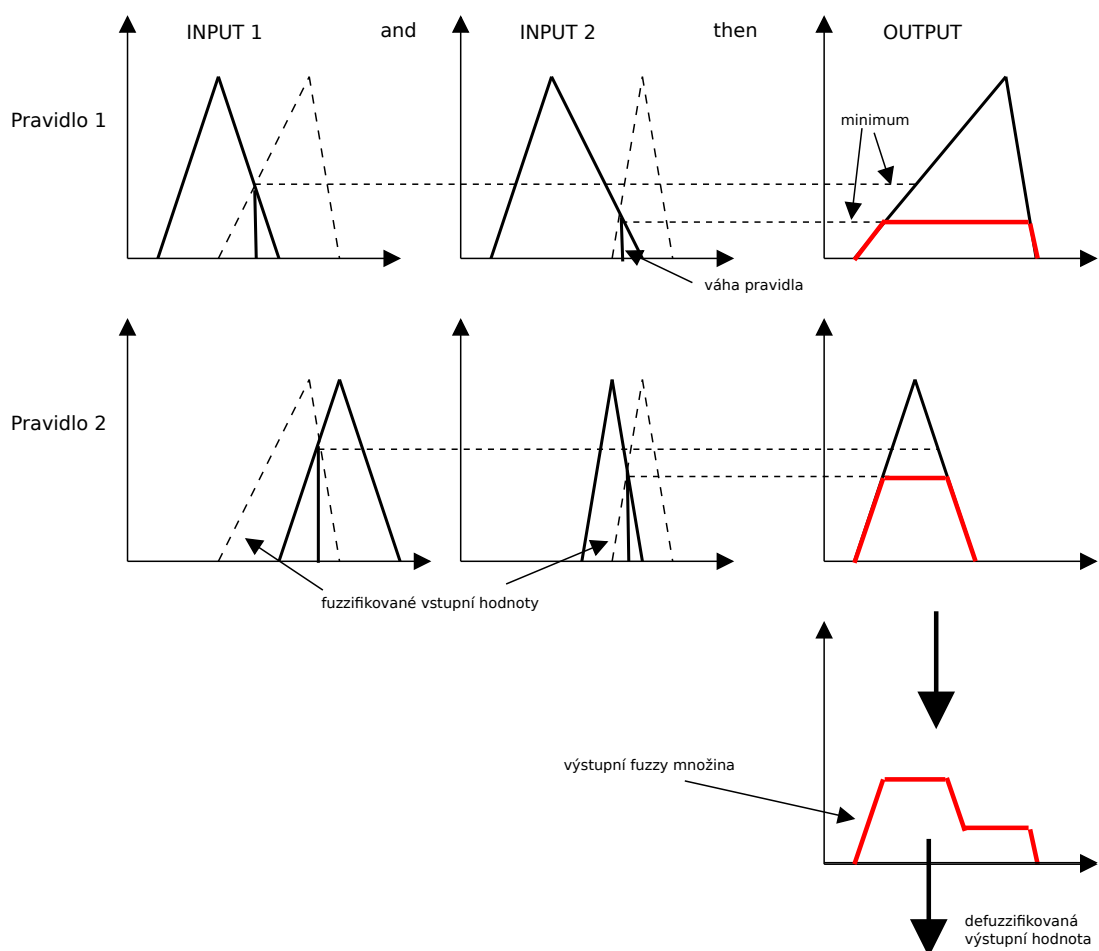
Jakmile fuzzifikovaná hodnota vstoupí do inferenčního procesu, provede se na základě báze dat a báze pravidel výpočet řešení. Výstupem inferenčního procesu je fuzzy množina určená funkcí příslušnosti. Vzhledem k tomu, že výstup ve formě fuzzy množiny bývá pro praktické použití nevhodný, je nutno provést defuzzifikaci (tj. převedení na ostrou hodnotu). Metod defuzzifikace je celá řada. Nejpoužívanější z nich je *metoda středu plochy* (*metoda těžiště*). Ostrá hodnota veličiny je touto metodou určena jako souřadnice těžiště plochy pod grafem výstupní fuzzy množiny z inferenčního procesu [4, 6, 8].

Nejčastěji používaná implikace pro inferenční mechanismus je tzv. „*implikace*“ *mam-dani* (nejedná se o implikaci z matematického hlediska, ale je tak nazývána v literatuře). Struktura tohoto systému je jednoduchá, má n vstupních proměnných a jednu výstupní proměnnou. Každý fuzzy systém s více výstupními proměnnými lze dekomponovat na



Obrázek 2.11: Fuzzifikace trojúhelníkovou fuzzy množinou [6]

system s jednou výstupní proměnnou. Máme dány slovní hodnoty jazykových proměnných, definovaných jako fuzzy množiny. Každé univerzum U_i je pokryto systémem těchto fuzzy množin. Dále je dán soubor podmíněných pravidel typu *if – then*. Každé pravidlo představuje fuzzy implikaci (viz [6]), tj. fuzzy relaci mezi fuzzy množinami. Vyhodnocení vstupních hodnot pomocí souboru pravidel se provede tzv. *kompozicí*. Nejdříve se určí výška průniku fuzzifikovaných vstupních hodnot s příslušnými částmi v antecedentech pravidel. Potom se naleznou minimální hodnota této výšky v rámci každého pravidla. Tato hodnota se nazývá *váha pravidla* a vyjadřuje míru podobnosti předpokladu a pozorovaných hodnot. Váha pravidla určuje „oříznutí“ fuzzy množiny v konsekventu pravidla. Celková výstupní fuzzy množina se určí sjednocením závěrů ze všech pravidel. Grafické znázornění celého procesu vidíme na obrázku 2.12 [4, 6].



Obrázek 2.12: Inferenční proces - fuzzy systém typu Mamdani [4]

2.4 Fuzzy Markovovy řetězce

Nejen ve výrobě stavebních hmot a dílců se často setkáváme se zaváděním nových postupů a metod. V této situaci se pak velice těžko dají odhadnout data o postupu výroby. Proto by zavedení Markovových řetězců s využitím fuzzy logiky mohlo být jedním z řešení, jak docílit požadovaných výsledků s kvalitnější predikcí vývoje, než je tomu u klasických pravděpodobnostních metod. V následující kapitole jsou tedy vysvětleny některé pojmy z teorie použití fuzzy logiky v Markovových řetězcích [9].

2.4.1 Vybrané definice

Podle [9] značíme fuzzy množinu užitím čárky nad příslušným označením fuzzy množiny. Všechny fuzzy množiny v této kapitole jsou podmnožinami množiny reálných čísel R . Jestliže \bar{A} je fuzzy množina, potom $\bar{A}(x) \in \langle 0, 1 \rangle$ je funkce příslušnosti pro \bar{A} vyčíslené

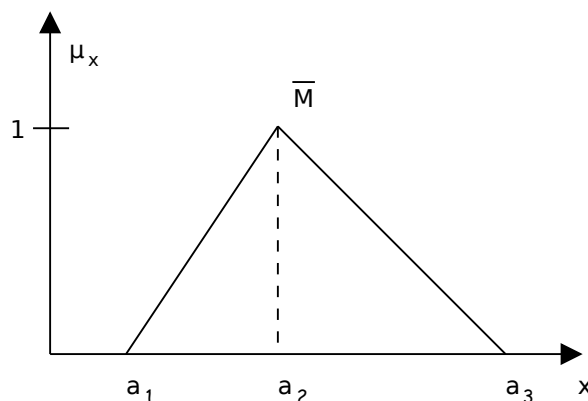
na $x \in R$. α -řez množiny \bar{A} , psáno $\bar{A}[\alpha]$ je definován jako $\{x | \bar{A}(x) \geq \alpha\}$ pro $0 < \alpha \leq 1$. Fuzzy číslo \bar{N} je fuzzy podmnožinou reálných čísel splňující dvě základní vlastnosti [9]:

1. $\bar{N}(x) = 1$ pro některá $x \in R$ (normalizovaná),
2. $\bar{N}[\alpha]$ je uzavřený interval s hraničními body $0 \leq \alpha \leq 1$.

Bude užito speciální fuzzy číslo \bar{M} nazvané *trojúhelníkové fuzzy číslo*, definované třemi čísly $a_1 < a_2 < a_3$, kde:

1. $\bar{M}(x) = 1$ pro $x = a_2$,
2. Graf $y = \bar{M}(x)$ pro $[a_1, a_2]$ je přímka z $(a_1, 0)$ do $(a_2, 1)$ a stejně tak pro $[a_2, a_3]$ je grafem přímka z $(a_2, 1)$ do $(a_3, 0)$,
3. $\bar{M}(x) = 0$ pro $x \leq a_1$ nebo $x \geq a_3$.

Fuzzy číslo \bar{M} zapisujeme jako $\bar{M} = (a_1/a_2/a_3)$, ukázkou trojúhelníkového fuzzy čísla vidíme na obrázku 2.13.



Obrázek 2.13: Trojúhelníkové fuzzy číslo \bar{M} [9]

Pro všechna fuzzy čísla \bar{N} máme $\bar{N}[\alpha] = [n_1(\alpha), n_2(\alpha)]$, $0 \leq \alpha \leq 1$. Funkce α popisuje uzavřený interval [9].

V *matici pravděpodobností přechodu* P (viz 2.2.2) u klasických Markovových řetězců musí být všechny *pravděpodobnosti přechodu* p_{ij} přesně známy. Často jsou tyto hodnoty odhadnuty na základě pravděpodobnostního počtu nebo určeny skupinou expertů. Předpokládáme, že některé z těchto pravděpodobností mohou být zkreslené a tuto nepřesnost

můžeme modelovat použitím fuzzy čísel tak, že každou z pravděpodobností přechodu p_{ij} nahradíme fuzzy číslem \bar{p}_{ij} a dostaneme *fuzzy matici pravděpodobností přechodu* $\bar{P} = (\bar{p}_{ij})$. Ne všechny pravděpodobnosti musí být převedeny na fuzzy čísla, některé mohou zůstat jako ostré hodnoty. Pokud máme $p_{ij} = 0$ nebo $p_{ij} = 1$, potom předpokládáme, že hodnota není zatížena žádnou nejistotou [9].

Nejistoty jsou zahrnuty v hodnotách pravděpodobností přechodu. Nyní je zapotřebí definovat omezené Fuzzy maticové násobení, abychom mohli vypočítat \bar{P}^n pro $n = 1, 2, 3, \dots$. Nejříve však musíme zavést některé definice [9]. Nechť

$$S = \{x = (x_1, \dots, x_r) | x_i \geq 0, \sum_{i=1}^r x_i = 1\}, \quad (2.33)$$

potom definujeme

$$Dom_i[\alpha] = \left(\prod_{j=1}^r p_{ij}[\alpha]\right) \cap S, \quad (2.34)$$

pro $0 \leq \alpha \leq 1$ a $1 \leq i \leq r$ (Dom značí oblast - „domain“) [9]. Potom

$$Dom[\alpha] = \prod_{i=1}^r Dom_i[\alpha]. \quad (2.35)$$

Dále množina $\bar{P}^n = (\bar{p}_{ij}^{(n)})$ kde si definujeme $\bar{p}_{ij}^{(n)}$ a ukážeme, že jsou to fuzzy čísla. Vezmeme v úvahu ostrou matici pravděpodobností přechodu P a $P^n = p_{ij}^{(n)}$. Víme, že

$$p_{ij}^{(n)} = f_{ij}^{(n)}(p_{11}, \dots, p_{rr}), \quad (2.36)$$

pro nějakou funkci $f_{ij}^{(n)}$. Rovnice 2.36 říká, že prvky v P^n jsou nějakými funkcemi prvků v P . Nyní uvažujme, že $f_{ij}^{(n)}$ je funkcí $p = (p_{11}, \dots, p_{rr}) \in Dom[\alpha]$ [9]. Potom

$$\Gamma_{ij}^{(n)}[\alpha] = f_{ij}^{(n)}(Dom[\alpha]). \quad (2.37)$$

To znamená, že $\Gamma_{ij}^{(n)}[\alpha]$ je množina všech hodnot $f_{ij}^{(n)}$ pro $(p_{11}, \dots, p_{rr}) \in Dom[\alpha]$. Nyní funkce $f_{ij}^{(n)}$ je souvislá a $Dom[\alpha]$ je spojitá, uzavřená a ohraničená, což znamená, že $\Gamma_{ij}^{(n)}[\alpha]$ je uzavřený a omezený interval pro všechna α, i, j a n . Nyní položíme

$$\bar{p}_{ij}^{(n)}[\alpha] = \Gamma_{ij}^{(n)}[\alpha], \quad (2.38)$$

vložení α -řezů pro $\bar{p}_{ij}^{(n)}$ do \bar{P}^n . Výsledná pravděpodobnost $\bar{p}_{ij}^{(n)}$ je fuzzy číslo protože jeho α -řezy jsou uzavřené, ohraničené intervaly a určitě jsou normalizovány [9].

Nejdříve, omezením $p_{ij} \in \bar{p}_{ij}[\alpha]$, které náleží do $Dom[\alpha]$, dostaneme $P = (p_{ij})$ ostrou matici přechodu pro konečný Markovův řetězec. Potom α -řez pro \bar{P}^n je množina všech P^n pro $(p_{11}, \dots, p_{rr}) \in Dom[\alpha]$. To je omezené fuzzy maticové násobení, protože nejistoty jsou v některých hodnotách pravděpodobnosti p_{ij} a ne v předpokladu, že každý řádek v matici pravděpodobností přechodu P je (přibližně) roven jedné [9].

Pro výpočet $\Gamma_{ij}^{(n)}[\alpha]$ potřebujeme najít hraniční body intervalů. Proto potřebujeme vyřešit

$$p_{ij1}^{(n)}(\alpha) = \min\{f_{ij}^{(n)}(p) | p \in Dom[\alpha]\} \quad (2.39)$$

a

$$p_{ij2}^{(n)}(\alpha) = \max\{f_{ij}^{(n)}(p) | p \in Dom[\alpha]\}, \quad (2.40)$$

kde $\bar{p}_{ij}^{(n)}[\alpha] = [p_{ij1}^{(n)}(\alpha), p_{ij2}^{(n)}(\alpha)]$ pro celé α .

V některých ojedinělých případech můžeme řešit rovnice 2.39 a 2.40 jako α -řezy pro $\bar{p}_{ij}^{(n)}$. Obecně by bylo zapotřebí vytvořit řízený vyhledávací algoritmus (genetický, evoluční) pro odhad řešení rovnic 2.39 a 2.40 [9].

2.4.2 Shrnutí

V této kapitole byly rozebrány konečné Markovovy řetězce, které vykazují nejistoty v některých hodnotách pravděpodobnosti v matici pravděpodobností přechodu. Tyto nejistoty se dají modelovat pomocí fuzzy čísel a je možné je modelovat také pomocí (ohraničených) intervalů. Nejistoty mohou být v některých z hodnot pravděpodobností přechodu v matici pravděpodobností přechodu, ale každý řádek v matici pravděpodobností přechodu musí být přibližně roven jedné [9].

3. Aplikace fuzzy Markovových řetězců ve výrobě stavebních hmot a dílců

Praktická část práce je zaměřena na výrobu betonového zboží a na aplikaci poznatků z teoretické části práce na tento výrobní postup. Jedná se konkrétně o betonovou zámkovou dlažbu, kterou lze vidět na obrázku 3.1. Celý výrobní postup takovéto dlažby je složen ze 14 kroků, které jsou podrobně popsány v části 3.1.4.



Obrázek 3.1: Ukázka betonové zámkové dlažby

Výroba betonového zboží se musí řídit určitými pevně danými pravidly. Na betonové výrobky jsou kladeny požadavky, které musí být striktně dodrženy. Podle normy ČSN EN 1338 – Betonové dlažební bloky – Požadavky a zkoušení u betonového zboží kontrolujeme [10]:

- tvar a rozměry,
- pevnost v příčném tahu,
- odolnost proti působení mrazu a chemických rozmrazovacích látek,
- odolnost proti povětrnostním vlivům,
- nasákavost,

- odolnost proti obrušování,
- odolnost proti smyku a kluzu,
- chování při požáru,
- vzhled výrobku (vizuální kontrola).

Pokud není některý z požadavků na kvalitu u výrobku dodržen, jedná se o tzv. neshodný výrobek, který by se neměl dostat na trh. Většinu požadavků lze ověřit pouze testováním hotových výrobků. Již při výrobě však lze kontrolovat tvar a rozměry výrobků a také vzhled. Pokud dojde k odhalení nějakých zjevných vad, je zapotřebí nevyhovující výrobek okamžitě vyřadit z distribuce.

Pro praktickou část práce byla získána data o postupu výroby zámkové dlažby od firmy, která si nepřála být jmenována.

3.1 Proces výroby betonového zboží

V této kapitole bude popsán celý proces výroby betonové zámkové dlažby od přejímky surovin od dodavatele, až po uskladnění hotových výrobků.

3.1.1 Lidské zdroje

Profese, počet pracovníků a kvalifikační požadavky:

- Vedoucí výroby (1) – vyučen, min. 5 let praxe v oboru
- Vedoucí provozu (1) – vyučen, min. 2 roky praxe v oboru
- Obsluha výrobního stroje (1) – vyučen, min. 1 rok praxe, zaškolení obsluhy výrobního stroje
- Obsluha paletizační linky a výstupní kontrola výrobků (1) – vyučen, zaškolení obsluhy linky a zaškolení v provádění kontroly výrobků
- Řidič vysokozdvížného vozíku (1) – základní vzdělání, řidičský průkaz skupiny B, (C), platný průkaz řidiče vysokozdvížného vozíku, zaškolení v obsluze vysokozdvížného vozíku

- Pomocný dělník (1) – základní vzdělání, zaškolení pro danou činnost

Poznámky:

Vedoucí výroby je stejný pro všechny výrobní linky ve firmě a zajišťuje dozor nad provozem a výrobou jednotlivých výrobních linek. Vedoucímu výroby je přímo podřízen vedoucí provozu, který zodpovídá za celé pracovní středisko jemu svěřené.

Pomocný dělník je přiřazen k pracovním úkolům a úkonům, které se nepřímo podílí na výrobním procesu. Nemá přímý vliv na kvalitu výroby.

3.1.2 Mechanismy

Použité mechanismy:

Dopravní pásy, šnekový dopravník cementu, 2 x míchačka, váhy (váhy na kamenivo, váhy na cement), dávkovací zařízení barev, dávkovací zařízení přísad, dávkovací zařízení vody, výrobní stroj AME (PFS 1300), dopravníky a zavážecí zařízení podložek s hotovými výrobky, vysoko zdvižný vozík, paletizační a balicí linka včetně páskování, tryskační zařízení.

Použité nářadí:

Svářecí technika, kotoučová bruska, vrtačka, pneumatické bourací kladivo (6,3 MPa), průmyslový vysavač, míchadlo na barvu, stolní bruska.

3.1.3 Materiály

Výrobní materiál:

- Kamenivo – frakce 0-4 mm, frakce 4-8 mm, frakce 0,1-0,6 mm, ostatní kamenivo
- Cement – CEM I 42,5 R, CEM I 52,5 R
- Pitná voda z vodovodního řádu
- Plastifikační přísada CHRYSO Lav Mix
- Tekuté a práškové pigmenty

Spotřební materiál:

Nafta, mazací oleje, konzervační oleje, hydraulický olej, separační olej na ostřík desek, technický benzín.

3.1.4 Popis procesu

Na obrázku 3.2 je znázorněn vývojový diagram procesu výroby betonové zámkové dlažby. V následujících odstavcích je tento proces rozebrán a popsán v jednotlivých, na sebe navazujících krocích.

1. Přejímka surovin

Jednotlivé suroviny (kamenivo, cement, pigmenty a přísady) jsou dopravcem dodávány na nákladních automobilech, pouze cement v autocisternách. Suroviny skládá dopravce na přesně určené a označené místo. Za kontrolu přejímky a dodacího listu kameniva odpovídá obsluha kolového nakladače. Za přejímku cementu odpovídá vedoucí provozu, cement je z cisterny pneumaticky dopravován do sil, označených dle třídy a druhu cementu. Pigmenty jsou umístěny v kontejnerech (tekuté) nebo v pytích (práškové). Přísady jsou umístěny v kontejnerech. Pigmenty i přísady přebírá vedoucí skladu, který kontroluje správnost dodacího listu a odpovídá za jejich uložení a předání vedoucímu provozu. Dodací listy všech surovin jsou dopravcem odevzdány na vrátnici při výjezdu dopravního vozidla ze závodu. Vrátný potvrdí dodávku materiálu a odevzdá dodací list vedoucímu expediční kanceláře, která si vede jejich evidenci.

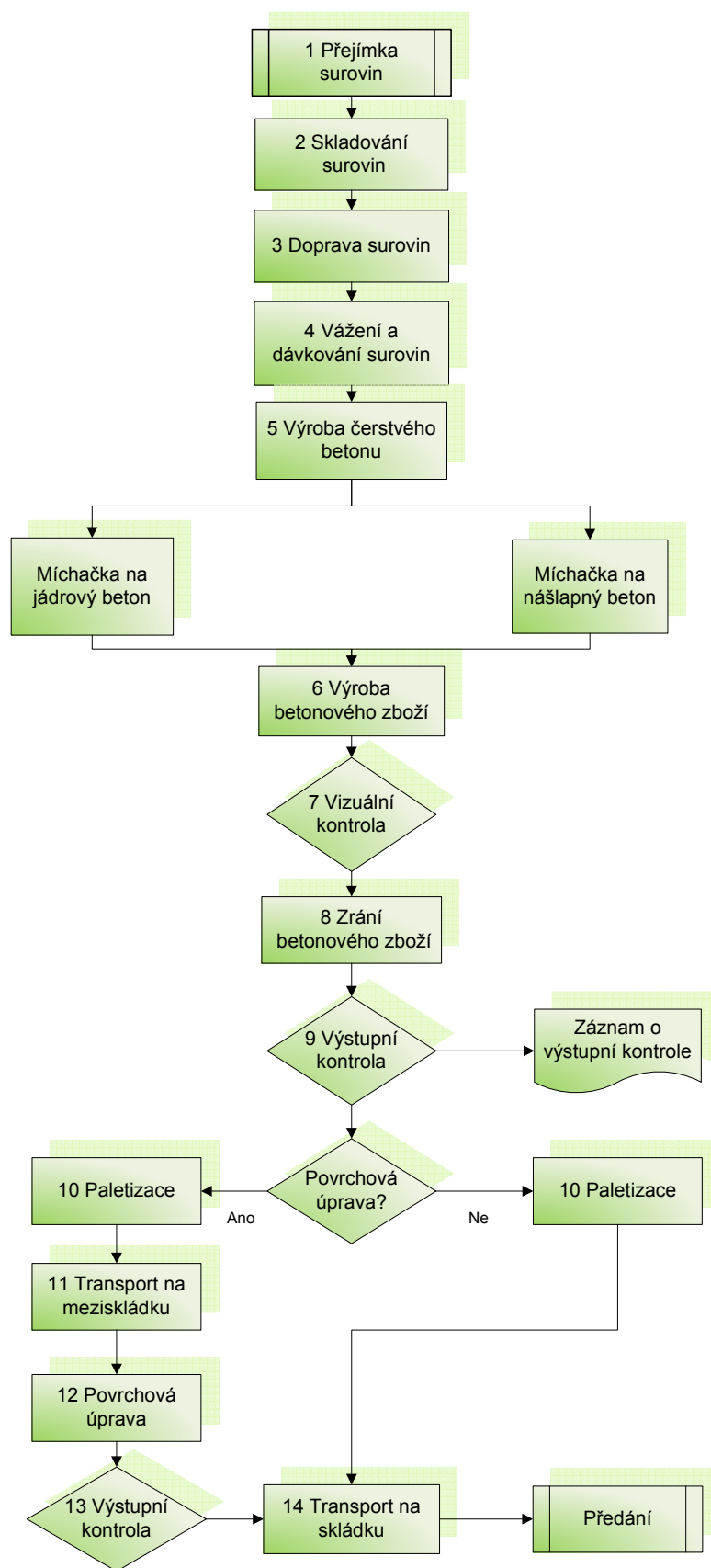
2. Skladování surovin

Jednotlivé suroviny jsou ukládány na místa, která jsou k tomu vyhrazena a jsou také náležitě označena.

Pro kameniva jsou místa označena dle jejich frakcí, skladuje se na venkovních skládkách, cementy v označených silech. Tekuté suroviny (pigmenty a přísady) jsou skladovány v kontejnerech. Každý z kontejnerů je patřičně označen. Práškové suroviny (pigmenty) jsou skladovány v tkaninových nebo papírových pytlích, ve kterých jsou dodávány.

3. Doprava surovin

Jednotlivé výrobní suroviny mají vlastní dopravní cesty, proto během jejich dopravy nedochází ke vzájemnému mísení. Kameniva jsou dodávána na pásových dopravnících do váhy, z váhy potom opět pásovým dopravníkem do míchačky. Cement je



Obrázek 3.2: Vývojový diagram procesu výroby betonového zboží

dopravován do váhy pomocí šnekového dopravníku, z váhy je přepouštěn do míchačky pomocí klapky. Tekuté pigmenty a přísady jsou čerpadlem dopravovány do váhy, z váhy přepouštěny do míchačky. Voda je z vodovodního řádu napouštěna do zásobníku, odkud je přečerpána do váhy a z váhy je také přepouštěna do míchačky.

4. Vážení a dávkování surovin

Všechny přísady jsou odvažovány na speciálních vahách určených pro konkrétní přísadu. Kameniva jsou odvažována zvlášť pro míchačku na „hrubozrnný“ beton a zvlášť pro míchačku na „drobnozrnný“ beton.

5. Výroba čerstvého betonu

Výroba betonu může probíhat nezávisle na sobě ve dvou míchačkách. Pokud se vyrábí pouze jednovrstvý výrobek, beton je připravován pouze v jedné míchačce. Vyrábí-li se dvouvrstvý výrobek, probíhá výroba betonu ve dvou míchačkách (výroba jádrového betonu a výroba betonu pro nášlapnou vrstvu).

Výroba jádrového („hrubozrnného“) betonu

Jádrový beton se vyrábí v míchačce o objemu $1,125\text{ m}^3$. Objem dávky (objem vyráběného betonu) závisí na druhu vyráběného betonového zboží. Množství vyráběného betonu volí obsluha výrobního stroje dle druhu výrobku, popř. jiných skutečností. Obsluha má v řídicí jednotce míchačky nastavené receptury, které vytváří a zadává výrobní ředitel. Zásah do složení betonu může provádět obsluha pouze po odsouhlasení nebo návrhu výrobního ředitele. Kontrola konzistence vyráběného betonu je sledována pomocí elektromagnetické sondy umístěné na dně míchačky. Pro ověření správné konzistence vyráběného betonu provede obsluha stroje vizuální kontrolu betonu přímo v míchačce. Vyrobený beton je následně vsypán do násypky výrobního stroje.

Výroba betonu pro nášlapnou vrstvu („drobnozrnný“ beton)

Beton pro nášlapnou vrstvu se vyrábí v míchačce o objemu $0,375\text{ m}^3$. Další postup je shodný s postupem výroby pro jádrový („hrubozrnný“) beton (viz předchozí odstavec).

6. Výroba betonového zboží

Výroba betonového zboží na výrobním stroji spočívá v součinnosti několika postupných kroků: plnění výrobní formy betonem, jeho správného zpracování (zhutnění) pomocí vibrace a lisování a odformování vzniklého betonového zboží. Takto vyrobené betonové zboží je po odformování na výrobní desku transportováno pomocí dopravníku k vizuální kontrole obsluhy stroje.

7. Vizuální kontrola betonového zboží

Vizuální kontrolu výrobků provádí obsluha stroje, která ověřuje, zda má výrobek předepsané parametry (rozměry, vzhled, barva, konzistence betonu, kvalita povrchu atd.). Pokud obsluha shledá určitý nedostatek oproti požadavku, musí provést kroky k jeho odstranění. Pokud obsluha tento nedostatek není schopná odstranit, informuje vedoucího provozu, který se ihned podílí na jeho odstranění. Pokud nesjedná nápravu ani vedoucí provozu, informuje vedoucího výroby. Vedoucí výroby neprodleně informuje výrobního ředitele. Pokud se nedostatek nepodaří odstranit během výroby, musí se výroba zastavit, aby nedošlo ke snížení kvality vyráběného zboží. Vizuální kontrola slouží pouze k řízení a kontrole výrobního procesu, nejedná se o třídění výrobků podle jejich jakosti.

8. Zrání betonového zboží

Po vizuální kontrole je vyrobené betonové zboží umístěno pomocí zavážecího zařízení do košů, které jsou po zaplnění ukládány na skládku čerstvých výrobků. Zde je betonové zboží ponecháno v klidu k dosažení potřebných vlastností k jejich paletizaci. Pokyn k paletizaci dává obsluze paletizační linky vedoucí provozu.

9. Výstupní kontrola betonového zboží

Výstupní kontrola má za úkol odstranit před paletizací neshodné výrobky od kvalitní výroby. Neshodné výrobky jsou ručně nebo pomocí mechanických kleští odebírány z výrobních podložek a ukládány na palety k tomu určené. Toto zboží se označí jako výrobky II. jakosti a po zaplnění palety se zabezpečí proti posuvu fixační fólií. Pokud je výrobek v takovém stavu, že jej není možno zařadit ani do nižší třídy jakosti, jsou tyto výrobky umístěny do kontejneru a následně vyvezeny na skládku.

10. Povrchová úprava

Pokud je vyrobeno betonové zboží, které se má dále ještě upravovat, kontrola jejich kvality a následná paletizace probíhá stejným způsobem jako u hotového betonového zboží.

11. Transport výrobku pro povrchovou úpravu na meziskládku

Polotovary uložené na paletách jsou pomocí vysokozdvížného vozíku převezeny na meziskládku výrobků, kde jsou uloženy na určené místo.

12. Provedení povrchové úpravy

Povrchová úprava spočívá v tryskání povrchu výrobku pomocí ocelových „broků“, které jsou pomocí lopatek, umístěných na oběžných kolech, vháněny na povrch výrobku. Z povrchu výrobku dojde k otryskání části cementového tmelu.

13. Výstupní kontrola po povrchové úpravě

Betonové zboží je po provedení povrchové úpravy opět podrobeno vizuální kontrole, která má za úkol roztrždit výrobky dle jejich kvality. Neshodné zboží se ukládá na samostatné palety, které se označí jako výrobky II. jakosti a zabezpečí se fixační fólií. Zboží, které projde kontrolou, je ručně ukládáno na palety, mezi jednotlivé řady se vkládají tkaninové vložky, které zabraňují poškození při transportu. Po zaplnění je paleta označena štítkem a zabezpečena fixační fólií.

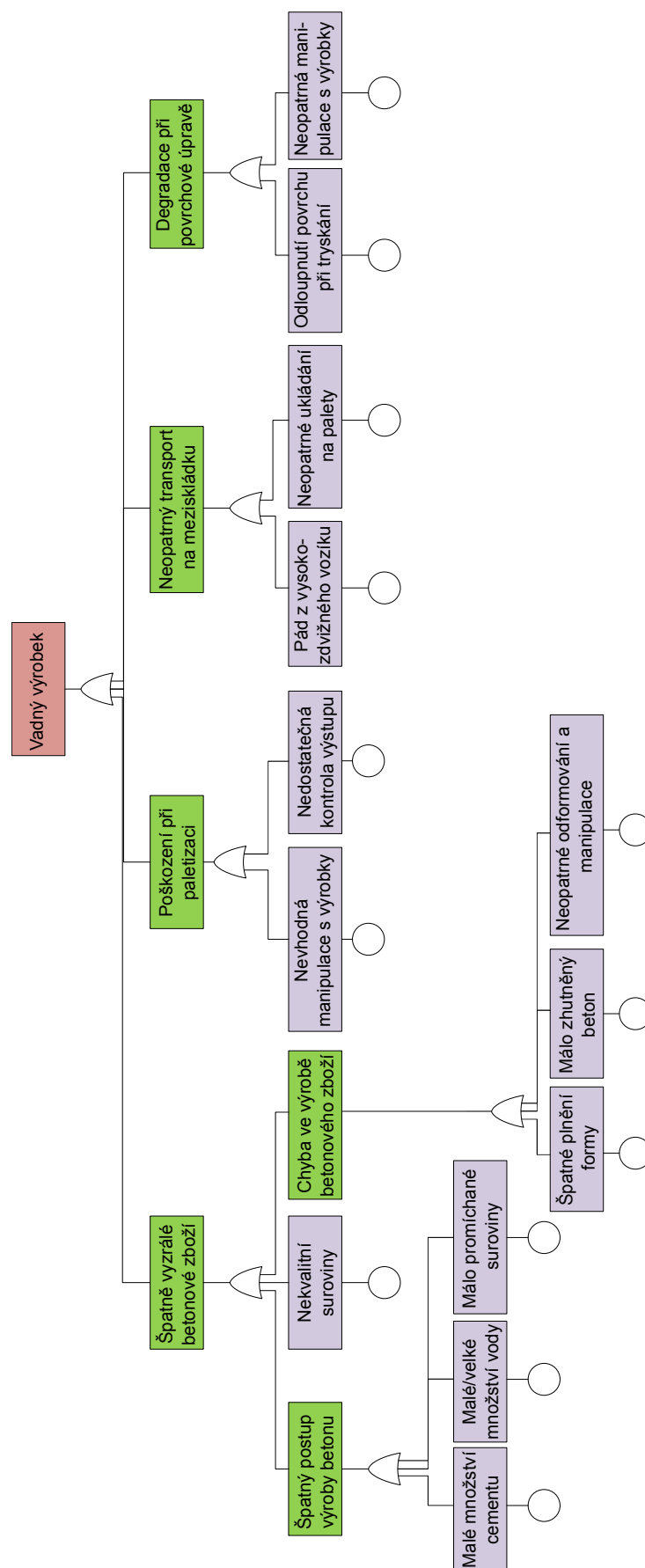
14. Transport na skládku

Výrobky uložené na paletách jsou pomocí vysokozdvížného vozíku převezeny na skládku, kde jsou uloženy na odpovídající místo, za což zodpovídá hlavní skladník.

3.2 Analýza stromu chyb

Pro postup výroby betonové zámkové dlažby byla zpracována analýza stromu chyb (viz obrázek 3.3), které mohou nastat při jednotlivých výrobních krocích. Z této analýzy dostaneme soupis možných kombinací provozních podmínek, které mohou vést k nežádoucí události. V tomto případě je nežádoucí událostí vadný výrobek a faktory, které mohou ovlivnit vznik vadného výrobku, jsou například: kvalita vstupních surovin, množství cementu/vody v čerstvém betonu, nedostatečné zhutnění betonu, neopatrná manipulace

s hotovými výrobky a další. Na základě výpisu nežádoucích jevů lze identifikovat rizikové faktory v postupu výroby a zamezit poruchám důkladnou kontrolou v těchto výrobních krocích.

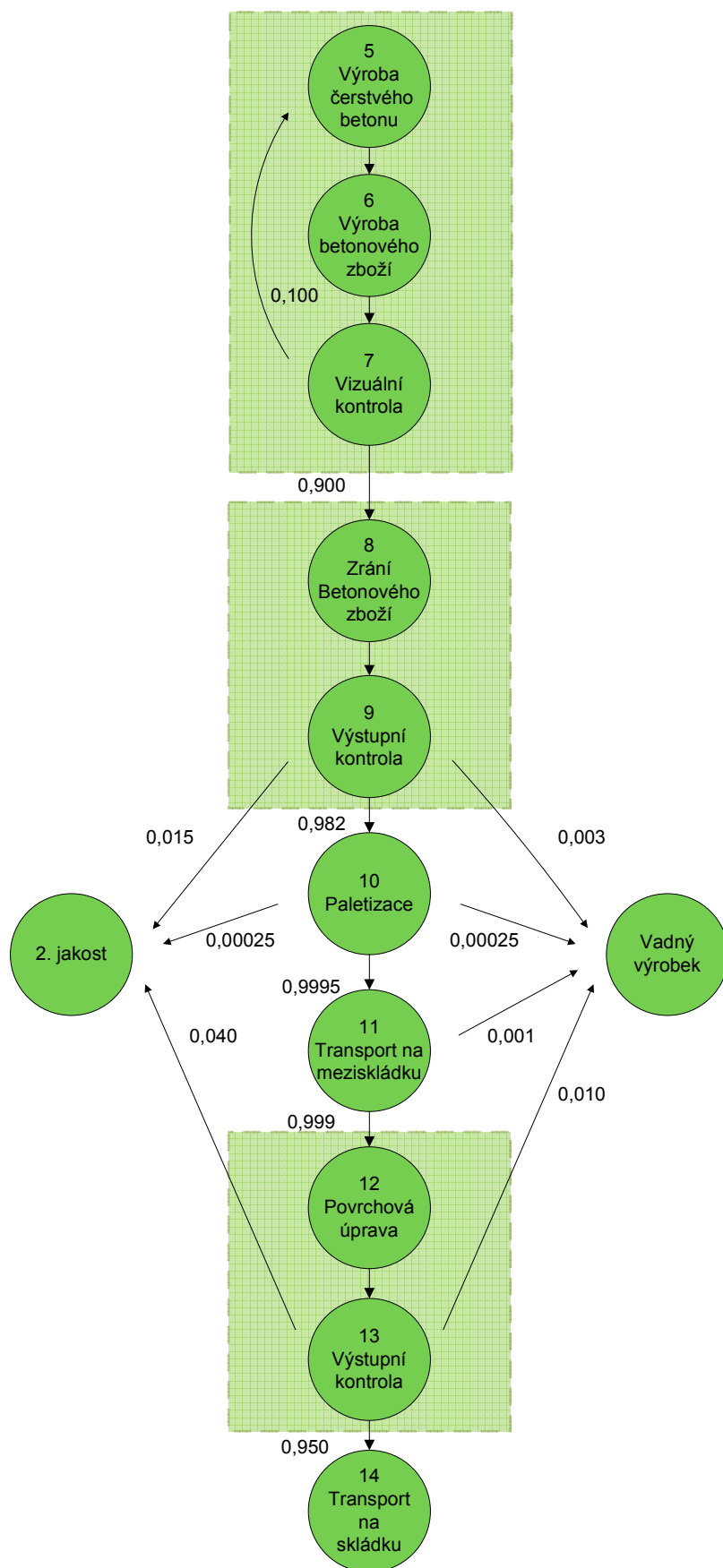


Obrázek 3.3: Analýza stromu chyb - FTA

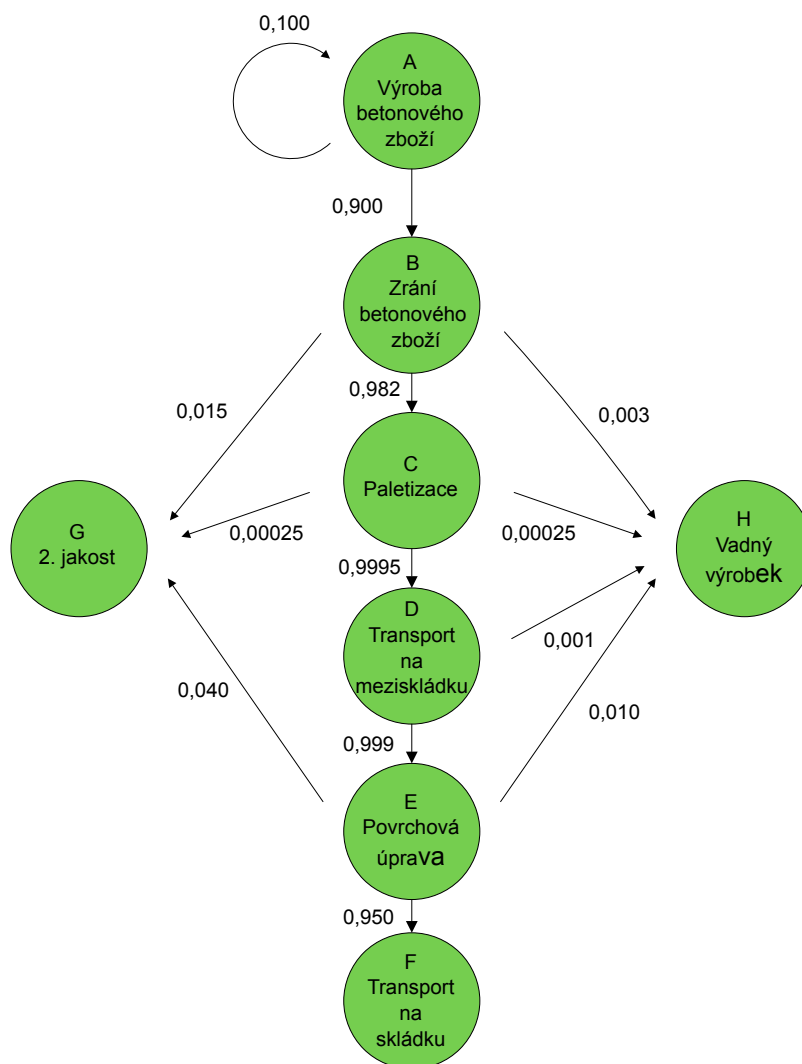
3.3 Aplikace klasických Markovových řetězců

Tato část práce je věnována aplikaci poznatků z kapitoly 2.2 na výrobu betonového zboží, konkrétně betonové zámkové dlažby. Daný výrobní proces lze vyjádřit z hlediska jakosti jako konečný homogenní Markovův řetězec s počtem stavů $a + b$, kde $a = 3$. Z vývojového diagramu na obrázku 3.2 byl vytvořen Markovův diagram pro proces výroby betonového zboží (viz obrázek 3.4), který zahrnuje všechny operace, kterými výrobek prochází během celého procesu. Vzhledem k tomu, že některé operace z hlediska pravděpodobností přechodu nemají velký význam, byla zavedena úprava (zjednodušení) tohoto výrobního procesu a některé operace byly sloučeny. Podle tohoto zjednodušení potom výrobek prochází jednotlivými výrobními operacemi až do podoby shodného finálního výrobku, výrobku druhé jakosti nebo vadného výrobku. Takto upravený Markovův diagram je vidět na obrázku 3.5. Jednotlivé operace, kterými výrobek prochází, jsou označeny písmeny A až H. Toto označení bude dodrženo pro všechny následující výpočty a pro zapisování do tabulek.

Pro konstrukci Markovovy analýzy výrobního procesu byl využit technologický postup, který je uveden v části 3.1.4 a vývojový diagram procesu (obrázek 3.2). Jak již bylo řečeno v kapitole 2.4, pro určení pravděpodobností přechodu z jednoho stavu do druhého v matici pravděpodobností přechodu, musíme znát data z předchozího měření stavů systému, nebo musí být proveden co nejpřesnější expertní odhad skupinou expertů. Pro tuto diplomovou práci bylo využito dat získaných od firmy, která vyrábí betonové zboží. Pravděpodobnosti přechodu prvků z jednoho stavu do druhého jsou vidět na obrázcích 3.4 a 3.5.



Obrázek 3.4: Markovův diagram procesu výroby betonového zboží



Obrázek 3.5: Zjednodušený Markovův diagram procesu výroby betonového zboží

3.3.1 Matice pravděpodobností přechodu

Z uvedených informací je možné sestavit matici pravděpodobností přechodu. Pro modelování daného výrobního procesu bude využito homogenního Markovova řetězce s počtem stavů $a + b$, kde $a = 3$ je počet stavů absorbujících a $b = 5$ je počet stavů neabsorbujících. V tabulce 3.1 je matice pravděpodobností přechodů s označením stavů A až H.

Tabulka 3.1: Matice pravděpodobností přechodu

	A	B	C	D	E	F	G	H	Σ
A	0,1	0,9	0	0	0	0	0	0	1
B	0	0	0,982	0	0	0	0,015	0,003	1
C	0	0	0	0,9995	0	0	0,00025	0,00025	1
D	0	0	0	0	0,999	0	0	0,001	1
E	0	0	0	0	0	0,95	0,04	0,01	1
F	0	0	0	0	0	1	0	0	1
G	0	0	0	0	0	0	1	0	1
H	0	0	0	0	0	0	0	1	1

Rozdělení pravděpodobnosti stavů výrobků po první výrobní operaci je

$$\mathbf{P}(1) = \mathbf{P}(0)\mathbf{P} = [0, 1; 0, 9; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0],$$

kde klademe $\mathbf{P}(0) = [1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0]$. Interpretace výsledku je v tabulce 3.2.

Tabulka 3.2: Interpretace rozdělení pravděpodobnosti stavů výrobků po první výrobní operaci

Stav	Pravděpodobnost	Po provedení první operace
A	0,1	10 % výrobků podrobena znovu operaci A
B	0,9	90 % výrobků postoupilo do operace B
C	0	-
D	0	-
E	0	-
F	0	-
G	0	-
H	0	-

3.3.2 Výpočet absolutních pravděpodobností přechodu po 5 krocích

V tabulce 3.3 je vypočtená matice pravděpodobností přechodu po 5 krocích \mathbf{P}^5 .

Tabulka 3.3: Matice pravděpodobností přechodu po 5 krocích

	A	B	C	D	E	F	G	H	Σ
A	0,00001	0,00009	0,000884	0,008834	0,088247	0,838351	0,050543	0,013041	1
B	0	0	0	0	0	0,931501	0,054467	0,014032	1
C	0	0	0	0	0	0,948575	0,04019	0,011235	1
D	0	0	0	0	0	0,94905	0,03996	0,01099	1
E	0	0	0	0	0	0,95	0,04	0,01	1
F	0	0	0	0	0	1	0	0	1
G	0	0	0	0	0	0	1	0	1
H	0	0	0	0	0	0	0	1	1

Rozdělení pravděpodobností stavů betonových výrobků v jednotlivých dávkách výrobků po projití dávek, které vstoupily do procesu vždy do příslušné operace (tj. bez započítání výrobků, které se začaly vyrábět později), pěti výrobními operacemi je

$$\mathbf{P}(5) = \mathbf{P}(0)\mathbf{P}^5 = [0,00001; 0,00009; 0,000884; 0,008834; 0,088247; 0,838351; 0,050543; 0,013041],$$

kde $\mathbf{P}(0) = [1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0]$.

Interpretace výsledku je v tabulce 3.4.

Tabulka 3.4: Interpretace rozdělení pravděpodobnosti stavů výrobků po 5 výrobních operacích

Stav	Pravděpodobnost	Po pěti výrobních operacích
A	0,00001	0,001 % výrobků se podrobuje operaci A
B	0,00009	0,009 % výrobků se podrobuje operaci B
C	0,00088	0,088 % výrobků se podrobuje operaci C
D	0,00883	0,883 % výrobků se podrobuje operaci D
E	0,08825	8,825 % výrobků se podrobuje operaci E
F	0,83835	83,835 % výrobků je transportováno na skládku
G	0,05054	5,054 % výrobků je 2. jakosti
H	0,01304	1,304 % výrobků je vadných

3.3.3 Střední hodnoty počtu jednotlivých operací na jeden výrobek

Pro výpočet střední hodnoty počtu operací připadajících na jeden výrobek přerovnáme řádky a sloupce původní matice \mathbf{P} z tabulky matice pravděpodobností přechodu 3.1. Obdržíme matici pravděpodobností přechodu v kanonickém tvaru, kde čísla na okrajích jsou původní čísla stavů.

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & & \begin{matrix} a & b \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & F & G & H & A & B & C & D & E \\ \begin{matrix} F \\ G \\ H \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0,9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,015 & 0,003 & 0 & 0 & 0,982 & 0 & 0 \\ 0 & 0,00025 & 0,00025 & 0 & 0 & 0 & 0,9995 & 0 \\ 0 & 0 & 0,001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,999 \\ 0,95 & 0,04 & 0,01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (3.1)$$

Zde je $a = 3$ (počet absorbujících stavů) a $b = 5$ (počet neabsorbujících stavů procesu).

Matice \mathbf{Q} a \mathbf{R} potom mají tvar:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,982 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,9995 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,999 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0150 & 0,0030 \\ 0,0000 & 0,0003 & 0,0003 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0010 \\ 0,9500 & 0,0400 & 0,0100 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Po výpočtu obdržíme fundamentální matici 3.10.

$$\mathbf{M} = (\mathbf{I}_5 - \mathbf{Q})^{-1} = \begin{pmatrix} 1,1111 & 1,0000 & 0,9820 & 0,9815 & 0,9805 \\ 0,0000 & 1,0000 & 0,9820 & 0,9815 & 0,9805 \\ 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 & 0,9995 & 0,9985 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 & 0,9990 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Fundamentální matice obsahuje střední hodnoty počtu provedených operací pro jeden výrobek. Jsou zde započítány všechny výrobky: shodné finální výrobky, výrobky druhé jakosti a vadné výrobky. Matice středních hodnot počtu jednotlivých provedených operací, kterými projde výrobek, který vstoupil do první operace, je

$$\mathbf{P}(0)\mathbf{M} = [1,1111; 1,0000; 0,9820; 0,9815; 0,9805].$$

Interpretace výsledku je v tabulce 3.5. Tato tabulka ukazuje, kolikrát výrobek, který vstoupil do 1. operace, i -tou operací projde. Střední hodnota je indexem počtu provedení i -té operace.

Tabulka 3.5: Interpretace střední hodnoty počtu provedení i -té operace na jeden výrobek

Stav	Střední hodnota	Střední počet provedení i -té operace na jeden výrobek
A	1,1111	1. operací projde výrobek 1,1111 krát
B	1,0000	2. operací projde výrobek 1,0000 krát
C	0,9820	3. operací projde výrobek 0,9820 krát
D	0,9815	4. operací projde výrobek 0,9815 krát
E	0,9805	5. operací projde výrobek 0,9805 krát

3.3.4 Střední hodnoty počtu provedených operací na jeden výrobek v celém výrobním procesu

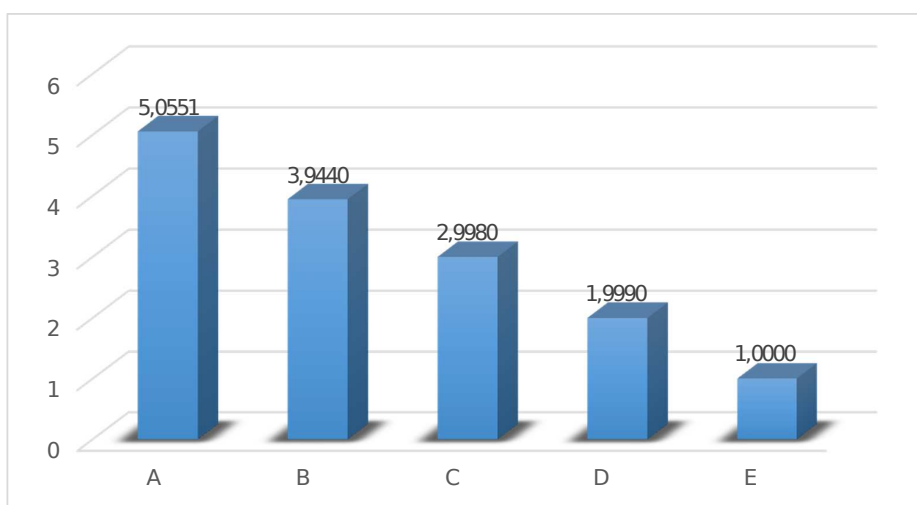
Matice středních hodnot počtu operací na jeden výrobek ve výrobním procesu (do vzniku finálního výrobku, výrobku druhé jakosti nebo vadného výrobku), když vstupuje do i -té operace, je

$$\mathbf{t} = \mathbf{M}\mathbf{c} = [5,0551; 3,9440; 2,9980; 1,9990; 1,0000]^T,$$

kde $\mathbf{c} = [1; 1; 1; 1; 1]^T$. Interpretace výsledku je v tabulce 3.6. Grafické zobrazení výsledků je potom zobrazeno na obrázku 3.6.

Tabulka 3.6: Interpretace středních hodnot počtu operací v celém výrobním procesu

Stav	Pravděpodobnost	Střední počet provedených výrobních operací na jeden výrobek
A	5,0551	výrobek projde 5,0551 operacemi, pokud vstupuje do operace A
B	3,9440	výrobek projde 3,9440 operacemi, pokud vstupuje do operace B
C	2,9980	výrobek projde 2,9980 operacemi, pokud vstupuje do operace C
D	1,9990	výrobek projde 1,9990 operacemi, pokud vstupuje do operace D
E	1,0000	výrobek projde 1,0000 operacemi, pokud vstupuje do operace E



Obrázek 3.6: Střední hodnoty počtu provedených operací na jeden výrobek v celém výrobním procesu

3.3.5 Pravděpodobnosti přechodů z neabsorbujících do absorbujících stavů

Matice pravděpodobnosti přechodů výrobků z neabsorbujících do absorbujících stavů je

$$\mathbf{B} = \mathbf{MR} = \begin{matrix} & \begin{matrix} F & G & H \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,9315 & 0,0545 & 0,0140 \\ 0,9315 & 0,0545 & 0,0140 \\ 0,9486 & 0,0402 & 0,0112 \\ 0,9491 & 0,0400 & 0,0110 \\ 0,9500 & 0,0400 & 0,0100 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (3.5)$$

Rozdělení pravděpodobnosti přechodů výrobků z neabsorbujících stavů do absorbujících stavů, které vstoupily pouze do první operace, je

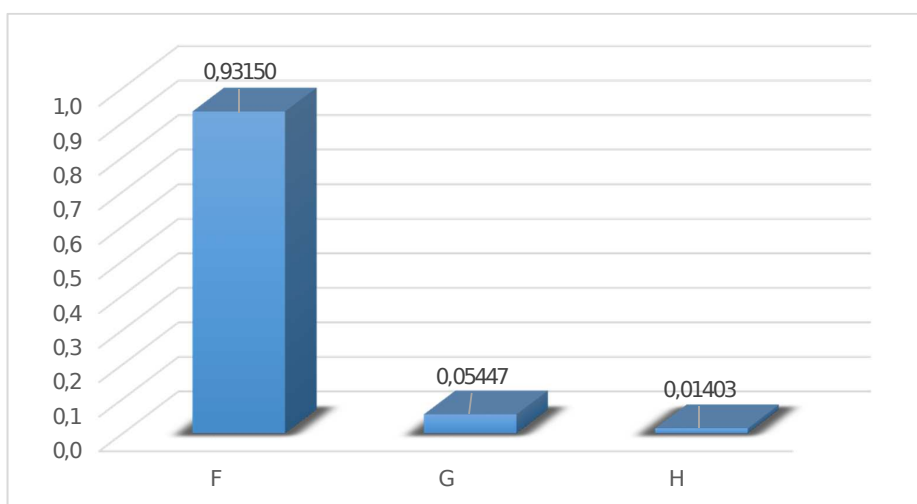
$$\mathbf{P}(0)\mathbf{B} = [0,9315; 0,0545; 0,0140],$$

kde klademe $\mathbf{P}(0) = [1; 0; 0; 0]$. Interpretace výsledku je v tabulce 3.7.

Tabulka 3.7: Interpretace pravděpodobnosti přechodů výrobků z neabsorbujících do absorbujících stavů

Stav	Pravděpodobnost	Pravděpodobnost přechodu výrobku, který vstoupil do 1. operace, že přejde do jednoho z absorbujících stavů
F	0,93150	93,15 % vzniku shodného finálního výrobku
G	0,05447	5,45 % vzniku výrobku druhé jakosti
H	0,01403	1,4 % vzniku vadného výrobku

Grafické zobrazení výsledků je potom zobrazeno na obrázku 3.7.



Obrázek 3.7: Pravděpodobnost přechodu výrobku do jednoho z absorbujících stavů

3.4 Aplikace fuzzy Markovových řetězců

V části 2.4 je vysvětleno užití fuzzy logiky při výpočtu Markovových řetězců. Tato metoda výpočtu je vhodná hlavně pro výrobní procesy, kde nejsou přesně známy pravděpodobnosti přechodu výrobků do jednotlivých stavů, nebo jsou pravděpodobnosti odhadnuty skupinou expertů. To platí zejména u nových výrobních postupů, kde jsou přesná data těžko zjistitelná, proto je práce s vágními pojmy lépe aplikovatelná a užití fuzzy logiky vede k přesnějším závěrům.

Tento postup výpočtu Markovových řetězců spočívá v nahrazení ostrých hodnot pravděpodobností přechodu fuzzy čísla – v našem případě bylo užito trojúhelníkových fuzzy čísel (viz obrázek 2.13). Funkce příslušnosti těchto fuzzy čísel je tvaru trojúhelníku (viz obrázek 2.6). Matice pravděpodobností přechodu má tvar:

$$\bar{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} \bar{p}_{11}, & \bar{p}_{12}, & \bar{p}_{13}, & \dots \\ \bar{p}_{21}, & \bar{p}_{22}, & \bar{p}_{23}, & \dots \\ \bar{p}_{31}, & \bar{p}_{32}, & \bar{p}_{33}, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

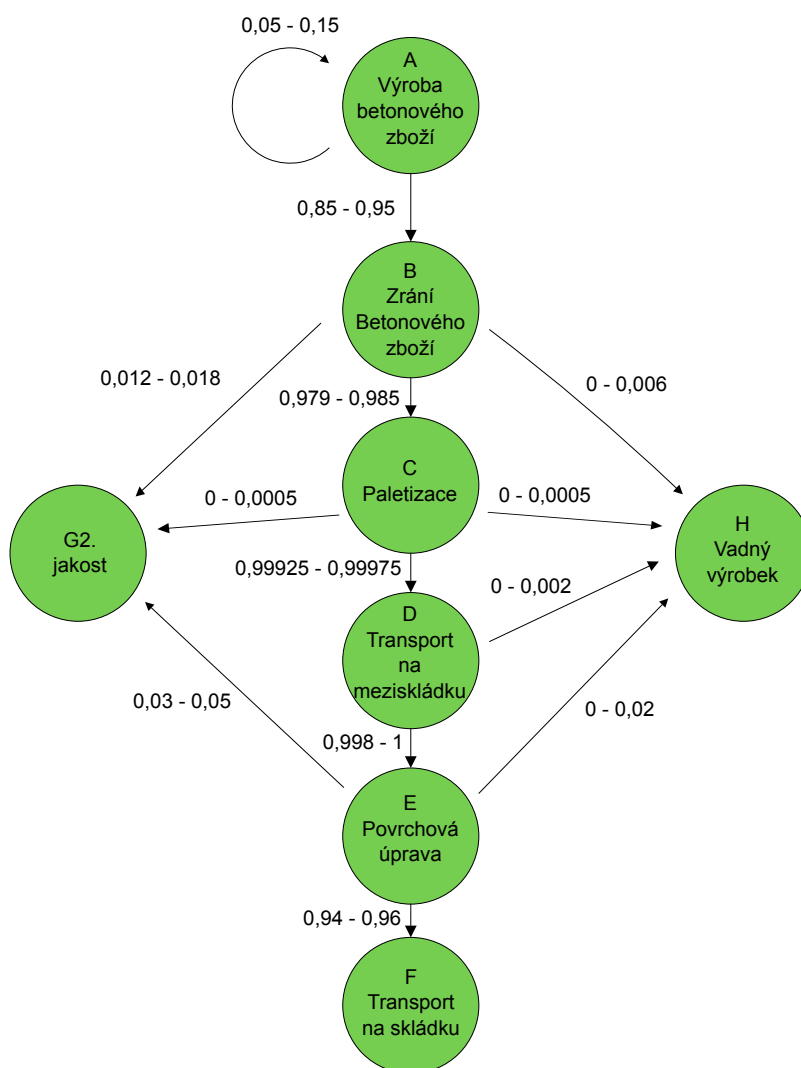
S rostoucí neurčitostí hodnoty roste i šířka základny trojúhelníka (u trojúhelníkových fuzzy čísel). Pro výpočty s fuzzifikovanými hodnotami bylo využito α -řezů fuzzy čísel, které byly následně zpracovány intervalovou aritmetikou.

Nejdříve je zapotřebí fuzzifikovat hodnoty pravděpodobností přechodu jednotlivých stavů. Fuzzifikace je provedena pomocí expertního odhadu nejistoty konkrétních stavů. Pro každou pravděpodobnost přechodu z jednoho stavu do druhého je uvažováno jiné hodnoty nejistoty, protože každý ze stavů má svá rozdílná specifika a může tudíž různě ovlivňovat danou kvalitu betonového výrobku. Přidělení hodnot nejistoty pro konkrétní operace je k vidění v tabulce 3.8. U výrobních operací označených písmeny F,G,H nejistoty neuvažujeme. Jedná se o absorbující stavy a tedy zde neočekáváme žádné odchylky.

Funkce příslušnosti jednotlivých pravděpodobností přechodu leží tedy v intervalech α -řezů v hodnotě 0, a které jsou znázorněny na obrázku 3.8 ve zjednodušeném diagramu. Z tohoto diagramu lze zapsat pravděpodobnosti přechodu do tabulky 3.9 pomocí α -řezů.

Tabulka 3.8: Hodnoty nejistot jednotlivých pravděpodobností přechodu

STAV	NEJISTOTA
A	5,000 %
B	0,300 %
C	0,025 %
D	0,100 %
E	1,000 %
F	-
G	-
H	-



Obrázek 3.8: Zjednodušený fuzzy Markovův diagram

Tabulka 3.9: Alfa-řezy fuzzy pravděpodobností přechodu v matici pravděpodobností přechodu

Pravděpodobnost přechodu	$\alpha = 1$	$\alpha = 0$
p_{AA}	0,1	[0,05;0,15]
p_{AB}	0,9	[0,85;0,95]
p_{BC}	0,982	[0,979;0,985]
p_{BG}	0,015	[0,012;0,018]
p_{BH}	0,003	[0;0,006]
p_{CD}	0,9995	[0,99925;0,99975]
p_{CG}	0,00025	[0;0,0005]
p_{CH}	0,00025	[0;0,0005]
p_{DE}	0,999	[0,998;0]
p_{DH}	0,001	[0;0,002]
p_{EF}	0,95	[0,94;0,96]
p_{EG}	0,04	[0,03;0,05]
p_{EH}	0,01	[0;0,02]

3.4.1 Výpočet absolutních pravděpodobností přechodu po 5 krocích

Pro výpočet absolutních pravděpodobností přechodu bylo použito vždy hraničních bodů intervalů z α -řezů fuzzy pravděpodobností přechodu. Matice byly vytvořeny zvlášť pro levé hraniční body intervalů a zvlášť pro pravé hraniční body intervalů. V tabulkách 3.10 a 3.11 jsou vypočtené matice pravděpodobností přechodu po 5 krocích \mathbf{P}^5 .

Tabulka 3.10: Matice pravděpodobností přechodu po 5 krocích pro levé hraniční body intervalů α -řezů

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	$3,13 \cdot 10^{-7}$	$5,31 \cdot 10^{-6}$	0,000104	0,002079	0,041493	0,780071	0,035633	0
B	0	0	0	0	0	0,917731	0,041289	0
C	0	0	0	0	0	0,937416	0,029918	0
D	0	0	0	0	0	0,93812	0,02994	0
E	0	0	0	0	0	0,94	0,03	0
F	0	0	0	0	0	1	0	0
G	0	0	0	0	0	0	1	0
H	0	0	0	0	0	0	0	1

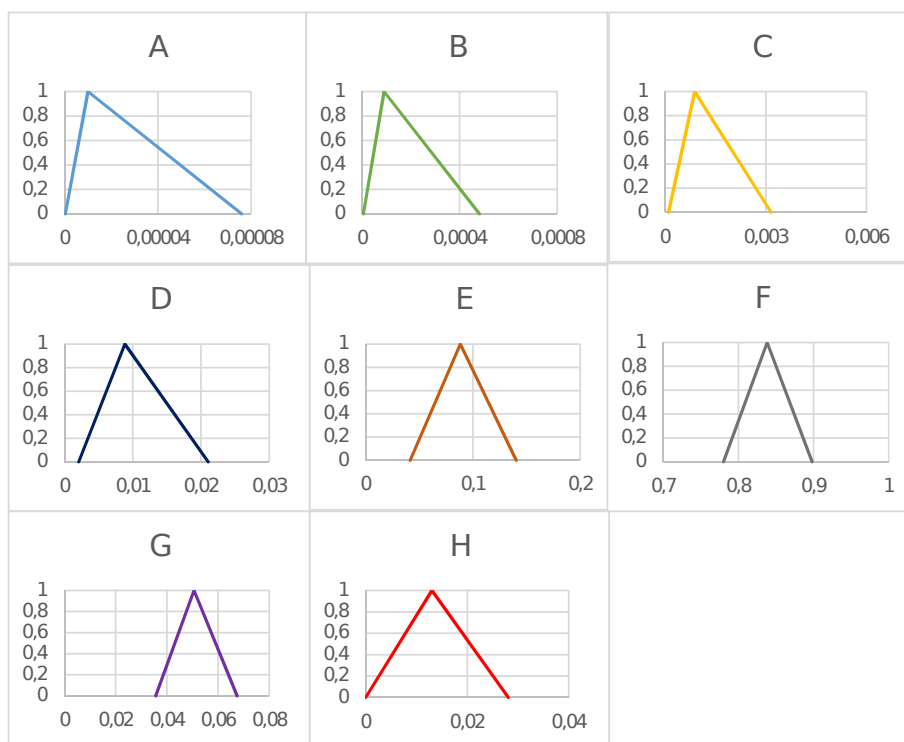
Tabulka 3.11: Matice pravděpodobností přechodu po 5 krocích pro pravé hraniční body intervalů α -řezů

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	0,0000759	0,000481	0,003158	0,021049	0,140327	0,898095	0,067432	0,028113
B	0	0	0	0	0	0,945364	0,06773	0,028157
C	0	0	0	0	0	0,95976	0,050488	0,022495
D	0	0	0	0	0	0,96	0,05	0,022
E	0	0	0	0	0	0,96	0,05	0,02
F	0	0	0	0	0	1	0	0
G	0	0	0	0	0	0	1	0
H	0	0	0	0	0	0	0	1

Výsledná fuzzy čísla z matic pravděpodobností přechodu po 5-ti výrobních operacích jsou znázorněna na obrázku 3.9. Defuzzifikace je provedena metodou těžiště plochy, v tomto případě se jedná o těžiště trojúhelníku. Defuzzifikované hodnoty těžiště byly získány výpočty pomocí vektorové algebry z matic 3.10 a 3.11. Výslednou matici pravděpodobností přechodu po 5 krocích lze vidět v tabulce 3.12.

Tabulka 3.12: Výsledná matice pravděpodobností přechodu po 5 krocích

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	0,00002875	0,000192	0,001382	0,010654	0,090023	0,838839	0,051202	0,013718
B	0	0	0	0	0	0,931532	0,054495	0,014063
C	0	0	0	0	0	0,948584	0,040198	0,011243
D	0	0	0	0	0	0,949057	0,039967	0,010997
E	0	0	0	0	0	0,95	0,04	0,01
F	0	0	0	0	0	1	0	0
G	0	0	0	0	0	0	1	0
H	0	0	0	0	0	0	0	1



Obrázek 3.9: Fuzzy hodnoty pravděpodobností přechodu po 5 krocích

Rozdělení pravděpodobností stavů betonových výrobků v jednotlivých dávkách výrobků po projití dávek, které vstoupily do procesu vždy do příslušné operace (tj. bez započítání výrobků, které se začaly vyrábět později), pěti výrobními operacemi je

$$\mathbf{P}(5) = \mathbf{P}(0)\mathbf{P}^5 = [0,00003; 0,00019; 0,00138; 0,01065; 0,09002; 0,83884; 0,05120; 0,01378],$$

kde $\mathbf{P}(0) = [1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0]$.

Interpretace výsledku je v tabulce 3.13.

Tabulka 3.13: Interpretace rozdělení pravděpodobnosti stavů výrobků po 5 výrobních operacích

Stav	Pravděpodobnost	Po pěti výrobních operacích
A	0,00003	0,003 % výrobků se podrobuje operaci A
B	0,00019	0,019 % výrobků se podrobuje operaci B
C	0,00138	0,138 % výrobků se podrobuje operaci C
D	0,01065	1,065 % výrobků se podrobuje operaci D
E	0,09002	9,002 % výrobků se podrobuje operaci E
F	0,83884	83,884 % výrobků je transportováno na skládku
G	0,05120	5,120 % výrobků je 2. jakosti
H	0,01378	1,378 % výrobků je vadných

3.4.2 Střední hodnoty počtu jednotlivých operací na jeden výrobek

Pro výpočet střední hodnoty počtu operací připadajících na jeden výrobek přerovnáme řádky a sloupce původní fuzzy matice pravděpodobností přechodu $\bar{\mathbf{P}}$. Obdržíme fuzzy matici pravděpodobností přechodu v kanonickém tvaru. Toto provedeme pro matici s levými i pravými krajními hodnotami intervalů α -řezů. Po výpočtu obdržíme fundamentální matice 3.7 a 3.8.

$$\mathbf{M}_L = (\mathbf{I}_5 - \mathbf{Q}_L)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,0526 & 0,8947 & 0,8759 & 0,8753 & 0,8735 \\ 0,0000 & 1,0000 & 0,9790 & 0,9783 & 0,9763 \\ 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 & 0,9993 & 0,9973 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 & 0,9980 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

$$\mathbf{M}_P = (\mathbf{I}_5 - \mathbf{Q}_P)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,1765 & 1,1176 & 1,1009 & 1,1006 & 1,1006 \\ 0,0000 & 1,0000 & 0,9850 & 0,9848 & 0,9848 \\ 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 & 0,9998 & 0,9998 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 & 1,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Fundamentální matice obsahují střední hodnoty počtu provedených operací pro jeden výrobek. Jsou zde započítány všechny výrobky: shodné finální výrobky, výrobky druhé jakosti a vadné výrobky. Matice středních hodnot počtu jednotlivých provedených operací (po defuzzifikaci), kterými projde výrobek , který vstoupil do první operace, je

$$\mathbf{P}(0)\mathbf{M} = [1,1134; 1,0041; 0,9863; 0,9858; 0,9849].$$

Interpretace výsledku je v tabulce 3.14. Tato tabulka ukazuje, kolikrát výrobek, který vstoupil do 1. operace, i -tou operací projde. Střední hodnota je indexem počtu provedení i -té operace.

Tabulka 3.14: Interpretace střední hodnoty počtu provedení i -té operace na jeden výrobek

Stav	Střední hodnota	Střední počet provedení i -té operace na jeden výrobek
A	1,1134	1. operací projde výrobek 1,1134 krát
B	1,0041	2. operací projde výrobek 1,0041 krát
C	0,9863	3. operací projde výrobek 0,9863 krát
D	0,9858	4. operací projde výrobek 0,9858 krát
E	0,9849	5. operací projde výrobek 0,9849 krát

3.4.3 Střední hodnoty počtu provedených operací na jeden výrobek v celém výrobním procesu

Matice středních hodnot počtu operací na jeden výrobek ve výrobním procesu (do vzniku finálního výrobku, výrobku druhé jakosti nebo vadného výrobku) pro levé hraniční body intervalů α -řezů, je

$$\mathbf{t}_L = \mathbf{M}_L \mathbf{c} = [4, 5721; 3, 9336; 2, 9965; 1, 9980; 1, 0000]^T,$$

kde $\mathbf{c} = [1; 1; 1; 1; 1]^T$. Pro pravé hraniční body intervalů α -řezů vypadá matice takto:

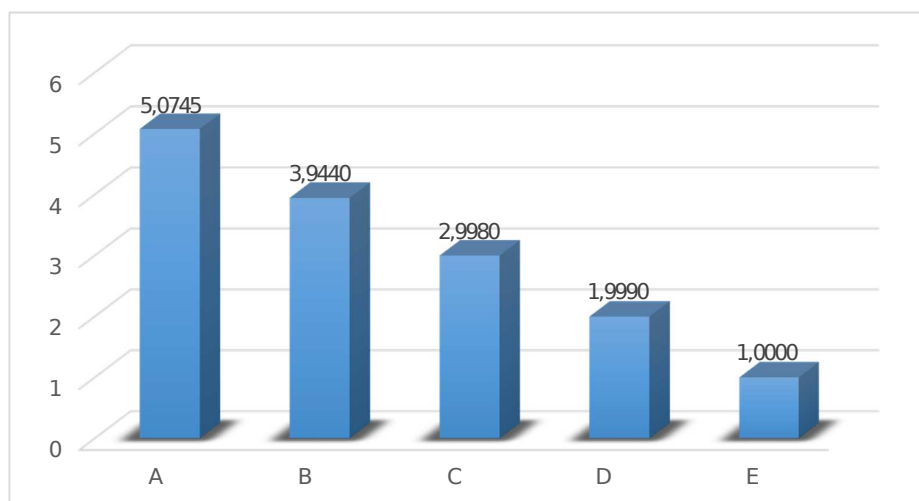
$$\mathbf{t}_P = \mathbf{M}_P \mathbf{c} = [5, 5962; 3, 9545; 2, 9995; 2, 0000; 1, 0000]^T.$$

Interpretace výsledku po defuzzifikaci je v tabulce 3.15.

Tabulka 3.15: Interpretace středních hodnot počtu operací v celém výrobním procesu

Stav	Pravděpodobnost	Střední počet provedených výrobních operací na jeden výrobek
A	5,0745	výrobek projde 5,0745 operacemi, pokud vstupuje do operace A
B	3,9440	výrobek projde 3,9440 operacemi, pokud vstupuje do operace B
C	2,9980	výrobek projde 2,9980 operacemi, pokud vstupuje do operace C
D	1,9990	výrobek projde 1,9990 operacemi, pokud vstupuje do operace D
E	1,0000	výrobek projde 1,0000 operacemi, pokud vstupuje do operace E

Grafické zobrazení výsledků je na obrázku 3.10.



Obrázek 3.10: Střední hodnoty počtu provedených operací na jeden výrobek v celém výrobním procesu - fuzzy

3.4.4 Pravděpodobnosti přechodů z neabsorbujících do absorbujících stavů

Matice pravděpodobnosti přechodů výrobků z neabsorbujících do absorbujících stavů je pro levé hraniční hodnoty intervalů α -řezů

$$\mathbf{B}_L = \mathbf{M}_L \mathbf{R}_L = \begin{matrix} & \begin{matrix} F & G & H \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,8211 & 0,0369 & 0,0000 \\ 0,9177 & 0,0413 & 0,0000 \\ 0,9374 & 0,0299 & 0,0000 \\ 0,9381 & 0,0299 & 0,0000 \\ 0,9400 & 0,0300 & 0,0000 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (3.9)$$

Pro pravé hraniční hodnoty intervalů α -řezů má matice tvar:

$$\mathbf{B}_P = \mathbf{M}_P \mathbf{R}_P = \begin{matrix} & \begin{matrix} F & G & H \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1,0566 & 0,0757 & 0,0315 \\ 0,9454 & 0,0677 & 0,0282 \\ 0,9598 & 0,0505 & 0,0225 \\ 0,9600 & 0,0500 & 0,0220 \\ 0,9600 & 0,0500 & 0,0200 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (3.10)$$

Rozdělení pravděpodobnosti přechodů výrobků z neabsorbujících stavů do absorbujících

cích stavů, které vstoupily pouze do první operace, je po defuzzifikaci

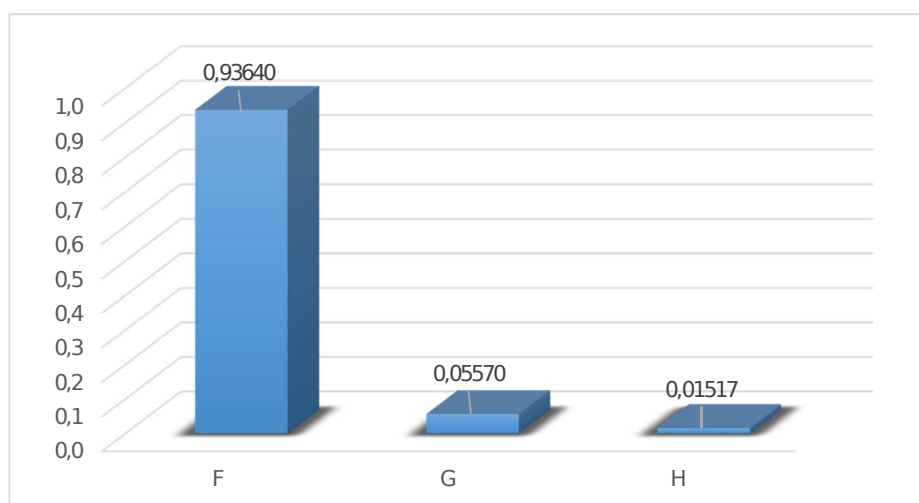
$$\mathbf{P}(0)\mathbf{B} = [0,9364; 0,0557; 0,0152],$$

kde klademe $\mathbf{P}(0) = [1; 0; 0; 0; 0]$. Interpretace výsledku je v tabulce 3.16.

Tabulka 3.16: Interpretace pravděpodobnosti přechodů výrobků z neabsorbujících do absorbujících stavů

Stav	Pravděpodobnost	Pravděpodobnost přechodu výrobku, který vstoupil do 1. operace, že přejde do jednoho z absorbujících stavů
F	0,93640	93,64 % vzniku shodného finálního výrobku
G	0,05570	5,57 % vzniku výrobku druhé jakosti
H	0,01517	1,52 % vzniku vadného výrobku

Grafické zobrazení výsledků je na obrázku 3.11.



Obrázek 3.11: Pravděpodobnost přechodu výrobku do jednoho z absorbujících stavů - fuzzy

3.5 Srovnání výsledků klasických a fuzzy Markovových řetězců

Pro názornou demonstraci rozdílů jsou v této kapitole porovnány a zapsány do tabulek výsledky obou metod výpočtu aplikace Markovových řetězců na výrobu betonového zboží.

Z předchozích kapitol lze vidět, že výsledky nejsou až tak odlišné, protože byly zvoleny malé rozptyly v pravděpodobnostech přechodu mezi jednotlivými stavy.

3.5.1 Porovnání pravděpodobností po 5 provedených operacích

V tabulce 3.17 je vidět, jaké rozdíly vznikly při výpočtu Markovových řetězců pomocí fuzzy logiky oproti klasickým výpočtům.

Tabulka 3.17: Porovnání pravděpodobností po 5 provedených operacích

Přístup	A	B	C	D	E	F	G	H
Klasický	0,00001	0,00009	0,000884	0,008834	0,088247	0,838351	0,050543	0,013041
Fuzzy	0,00003	0,00019	0,001382	0,010654	0,090023	0,838839	0,051202	0,013718
Rozdíl	0,00002	0,00010	0,000498	0,001820	0,001776	0,000488	0,000659	0,000677

3.5.2 Porovnání počtu jednotlivých operací na jeden výrobek

V tabulce 3.18 vidíme porovnání středních hodnot počtu operací na jeden výrobek pomocí klasického a fuzzy přístupu.

Tabulka 3.18: Porovnání středních hodnot počtu jednotlivých operací na jeden výrobek

Přístup	A	B	C	D	E
Klasický	1,1111	1,0000	0,9820	0,9815	0,9805
Fuzzy	1,1134	1,0041	0,9863	0,9858	0,9849
Rozdíl	0,0023	0,0041	0,0043	0,0043	0,0044

3.5.3 Porovnání počtu operací na jeden výrobek v celém výrobním procesu

V tabulce 3.19 je uvedeno srovnání výsledků počtu operací na jeden výrobek v celém výrobním procesu. Rozdíl u tohoto parametru je pouze v první výrobní operaci, což je zřejmě způsobeno malými odchylkami v pravděpodobnostech přechodu oproti klasickým řetězcům.

Tabulka 3.19: Porovnání středních hodnot počtu operací na jeden výrobek v celém výrobním procesu

Přístup	A	B	C	D	E
Klasický	5,0551	3,9440	2,9980	1,9990	1,0000
Fuzzy	5,0745	3,9440	2,9980	1,9990	1,0000
Rozdíl	0,0194	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

3.5.4 Porovnání pravděpodobností přechodů z neabsorbujících do absorbujících stavů

V tabulce 3.20 je uvedeno porovnání pravděpodobností přechodů z neabsorbujících do absorbujících stavů.

Tabulka 3.20: Porovnání pravděpodobností přechodů z neabsorbujících do absorbujících stavů

Přístup	F	G	H
Klasický	93,15	5,45	1,4
Fuzzy	93,64	5,57	1,52
Rozdíl	0,49	0,12	0,12

4. Závěr

Cílem diplomové práce bylo zabývat se aplikací Markovových řetězců a jejich rozšířením prostřednictvím teorie fuzzy množin v řízení rizik. Práce byla zaměřena na využití Markovových řetězců při výrobě stavebních hmot a dílců. V teoretické části jsou zpracovány poznatky, které jsou použitelné pro praktickou aplikaci řešeného problému.

Cílem praktické aplikace bylo ukázat využití Markovových řetězců na proces výroby betonového zboží a porovnat rozdíly mezi klasickým přístupem a přístupem s výpočty pomocí fuzzy logiky. Byl zpracován technologický postup výroby betonových dlažebních bloků. Tento výrobní postup sloužil pro názornou ukázkou praktické aplikace Markovových řetězců. Nejdříve byla zpracována analýza klasických Markovových řetězců, poté s přístupem pomocí fuzzy logiky a nakonec byly obě metody mezi sebou porovnány. Výsledky obou metod se od sebe nepatrně liší. Z výpočtů, které vycházejí z fuzzy přístupu, bychom mohli získat přesnější výstupy. To je způsobeno tím, že nepočítáme pouze s ostrými hodnotami pravděpodobností přechodu výrobku z jednoho stavu do druhého. S pomocí fuzzy přístupu počítáme s fuzzy čísly (zastoupené v tomto případě ohraničenými intervaly), které byly získány historickým měřením nebo expertním odhadem skupiny expertů.

Při hodnocení kvality a rizik ve výrobě stavebních dílců se výpočty s pomocí fuzzy logiky mohou stát vhodným nástrojem pro určení kritických stavů ve výrobním postupu. S použitím Markovovy techniky dostaneme ucelený náhled na celý proces a dokážeme stanovit rizikové faktory u většiny výrobních postupů. Zejména pak u těch, které jsou zaváděny jako nové, nebo jsou v provozu pouze krátce a nejsou u nich k dispozici dostatečně velké statistické soubory dat. U těchto nových postupů fuzzy přístup dává otevřenější náhled na celý proces, aniž by byly hodnoty zásadně zkresleny. Výsledky z těchto výpočtů lze využít pro úsporu zdrojů. Mohou pomoci ušetřit čas i náklady na materiál, a také zajistit, aby výstupy zůstaly v požadované kvalitě.

Fuzzy Markovovy řetězce by bylo možné uplatnit na některé další výrobní postupy v rámci výroby stavebních hmot a dílců. Pro tuto diplomovou práci byl příklad zpracován v tabulkovém programu Excel 2013, kde byly využity maticové výpočty. U náročných výrobních postupů, kde by bylo zapotřebí větší množství dat s velmi složitými výpočty, by bylo možné využít některého ze stávajících výpočetních softwarů, který využívá nadstavbu

pro práci s fuzzy logikou (např. Matlab).

Seznam obrázků

2.1	Proces managementu rizik [2]	6
2.2	Ukázka analýzy stromu chyb	10
2.3	Symbole používané v analýze stromu chyb	11
2.4	Markovův diagram procesu [2]	13
2.5	Grafické znázornění operací mezi množinami [6]	17
2.6	Tři základní tvary funkcí příslušnosti [6]	20
2.7	Základní pojmy fuzzy množin [6]	21
2.8	Operace mezi fuzzy množinami [6]	22
2.9	Struktura fuzzy systému [6]	25
2.10	Fuzziifikace singletonem [6]	26
2.11	Fuzziifikace trojúhelníkovou fuzzy množinou [6]	27
2.12	Inferenční proces - fuzzy systém typu Mamdani [4]	28
2.13	Trojúhelníkové fuzzy číslo \overline{M} [9]	29
3.1	Ukázka betonové zámkové dlažby	32
3.2	Vývojový diagram procesu výroby betonového zboží	36
3.3	Analýza stromu chyb - FTA	41
3.4	Markovův diagram procesu výroby betonového zboží	43
3.5	Zjednodušený Markovův diagram procesu výroby betonového zboží	44
3.6	Střední hodnoty počtu provedených operací na jeden výrobek v celém výrobním procesu	49
3.7	Pravděpodobnost přechodu výrobku do jednoho z absorbujících stavů	50
3.8	Zjednodušený fuzzy Markovův diagram	52
3.9	Fuzzy hodnoty pravděpodobností přechodu po 5 krocích	55
3.10	Střední hodnoty počtu provedených operací na jeden výrobek v celém výrobním procesu - fuzzy	58
3.11	Pravděpodobnost přechodu výrobku do jednoho z absorbujících stavů - fuzzy	59

Seznam tabulek

2.1	Markovova matice [2]	12
3.1	Matice pravděpodobností přechodu	45
3.2	Interpretace rozdělení pravděpodobnosti stavů výrobků po první výrobní operaci	45
3.3	Matice pravděpodobností přechodu po 5 krocích	46
3.4	Interpretace rozdělení pravděpodobnosti stavů výrobků po 5 výrobních operacích	46
3.5	Interpretace střední hodnoty počtu provedení i -té operace na jeden výrobek	48
3.6	Interpretace středních hodnot počtu operací v celém výrobním procesu	49
3.7	Interpretace pravděpodobnosti přechodů výrobků z neabsorbujících do absorbujících stavů	50
3.8	Hodnoty nejistot jednotlivých pravděpodobností přechodu	52
3.9	Alfa-řezy fuzzy pravděpodobností přechodu v matici pravděpodobností přechodu	53
3.10	Matice pravděpodobností přechodu po 5 krocích pro levé hraniční body intervalů α -řezů	53
3.11	Matice pravděpodobností přechodu po 5 krocích pro pravé hraniční body intervalů α -řezů	54
3.12	Výsledná matice pravděpodobností přechodu po 5 krocích	54
3.13	Interpretace rozdělení pravděpodobnosti stavů výrobků po 5 výrobních operacích	55
3.14	Interpretace střední hodnoty počtu provedení i -té operace na jeden výrobek	57
3.15	Interpretace středních hodnot počtu operací v celém výrobním procesu	57
3.16	Interpretace pravděpodobnosti přechodů výrobků z neabsorbujících do absorbujících stavů	59
3.17	Porovnání pravděpodobností po 5 provedených operacích	60
3.18	Porovnání středních hodnot počtu jednotlivých operací na jeden výrobek	60
3.19	Porovnání středních hodnot počtu operací na jeden výrobek v celém výrobním procesu	61

3.20 Porovnání pravděpodobností přechodů z neabsorbujících do absorbujících

stavů	61
-----------------	----

Literatura

- [1] ČSN ISO 31000. *Management rizik - Principy a směrnice*. Praha: Úřad pro technickou normalizaci, metrologii a státní zkušebnictví, 2010.
- [2] ČSN EN 31010. *Management rizik - Techniky posuzování rizik*. Praha: Úřad pro technickou normalizaci, metrologii a státní zkušebnictví, 2011.
- [3] KARPÍŠEK, Zdeněk. Markovovy řetězce a jejich aplikace. In: *Fakulta strojního inženýrství: Ústav matematiky* [online]. 2007 [cit. 2015-03-18]. Dostupné z: http://www.math.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=1747
- [4] VYMAZAL, Tomáš, Otakar Jiří MIKA a Petr MISÁK. *Analýza, posouzení a ošetření rizik technických systémů* [online]. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, 2013 [cit. 2015-01-08]. Dostupné z: <http://www.szsk.fce.vutbr.cz/vyuka/OP2/RI%202015.pdf>
- [5] JANÍČEK, Přemysl a Jiří MAREK. *Expertní inženýrství v systémovém pojetí*. 1. vyd. Praha: Grada, 2013, 592 s. Expert (Grada). ISBN 978-80-247-4127-7.
- [6] JURA, Pavel. *Základy fuzzy logiky pro řízení a modelování*. Vyd. 1. Brno: VUTIMUM, 2003, 132 s. ISBN 80-214-2261-0.
- [7] NAVARA, Mirko a Petr OLŠÁK. Základy fuzzy množin. In: *České vysoké učení technické: Katedra matematiky* [online]. Praha, 2002 [cit. 2015-01-08]. Dostupné z: <http://math.feld.cvut.cz/ftp/olsak/fuzzy/fuzzy.pdf>
- [8] MISÁK, Petr. *Možnosti řízení a minimalizace rizik technologie výroby stavebních materiálů a výrobků pomocí fuzzy logiky a dalších nástrojů risk managementu*. Brno: Vysoké učení technické v Brně. Fakulta stavební, 2013. Disertační práce.
- [9] BUCKLEY, James J. a Esfandiar ESLAMI. Fuzzy Markov Chains: Uncertain Probabilities. In: *ScienceDirect* [online]. 2014 [cit. 2015-01-12]. Dostupné z: <http://www.sciencedirect.com>
- [10] ČSN EN 1338. *Betonové dlažební bloky - Požadavky a zkušební metody*. Praha: Český normalizační institut, 2004.